Aufgabe 1

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine ebene Landschaft, in der ein Flughafen liegt. Im Folgenden werden die Flugbewegungen vereinfacht dargestellt. Unmittelbar nach dem Abheben des Flugzeuges F_1 im Punkt $P(-10\,|\,-14\,|\,0)$ von der Startbahn geht das Flugzeug in eine geradlinige Flugbahn g über:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le t \le 20\,.$$

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich längs der Geraden h mit

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Längeneinheit beträgt 1 km, t und s geben jeweils die Anzahl der Minuten an, die seit dem Start von F_1 vergangen sind.

a) *Geben Sie an, in welchen Punkten sich die Flugzeuge F_1 und F_2 drei Minuten nach dem Start von F_1 befinden. Berechnen Sie, welchen Abstand die Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt haben.* (7 P)

b) Das Flugzeug F_1 überfliegt den Gipfel $Q(2\,|\,2\,|\,1)$ eines nahe gelegenen Berges. *Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Bergspitze überflogen wird, und ermitteln Sie für diesen Zeitpunkt den Abstand zwischen der Bergspitze und dem Flugzeug.* (10 P)

c) Die Unterseite einer Wolkenformation verläuft annähernd längs der Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei für die Parameter wegen der räumlichen Ausdehnung der Wolkenfront gilt:
$2 \le k \le 3$; $0 \le m \le 4$
Prüfen Sie, ob die Unterseite der Wolkenfront von F_2 durchflogen wird. (11 P)

d) *Weisen Sie nach, dass sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 nicht schneiden.* (10 P)

e) Sollte F_2 genau 1 km tiefer fliegen, schneiden sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 im Punkt $S(8\,|\,10\,|\,3)$.
Prüfen Sie, ob es dann zu einer Kollision der beiden Flugzeuge kommt. (12 P)

Aufgabe 2

Gegeben sind die Gerade g durch den Punkt P(2 | 1 | -1) und den

Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade h_t durch den Punkt Q(9 | 12 | -2)

und den Richtungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

a) Bestimmen Sie t so, dass sich die beiden Geraden schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.
(Ergebnis: t = -1; S(6 | 9 | 7)).

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g, die von Q die Entfernung $3\sqrt{11}$ haben. Erstellen Sie dazu eine Skizze an.
(Ergebnis: A(6 | 9 | 7) = S, B(4 | 5 | 3))

Aufgabe 3

a) Eine Ebene E ist parallel zur Ebene F $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und enthält den Punkt P(1/2/-1).

Gib eine Koordinatengleichung von E an.

b) Gib die Gleichung einer Ebene an, die die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ enthält und den Punkt P(-1/-3/6) .

Aufgabe 4

a) Bestimme den Schnittpunkt P der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 Bilde die erste Ableitungsfunktion von:

a) $f(x) = e - e^x$ b) $f(x) = e^{x-1} - e^x$ c) $f(x) = xe - xe^x$ d) $f(x) = x^2 e - e^x x^{-1}$

e) $f(x) = ex^3 - x^2 e^x$ f) $f(x) = 1 - ke^x + x$

Aufgabe 6 Skalarprodukt Länge von Vektoren

1.

Gegeben sind die Punkte $P_1(2\,|\,1\,|\,0)$ und $P_2(-4\,|\,7\,|\,3)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Gerade h, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht.

b) Zeige, dass die Richtungsvektoren der Geraden g und h senkrecht zueinander stehen, die Gerad aber windschief zueinander sind.

c) Bestimme den Abstand der winschiefen Geraden.

d) Der Punkt $P_3(3\,|\,1\,|\,6)$ liegt auf der Geraden g. Die Punkte $P_1P_2P_3$ bilden ein Dreieck. Untersuch ob das Dreieck rechtwinklig ist und bestimme seinen Flächeninhalt.

262

Aufgabe 7*

Überlege eine Möglichkeit, den Abstand zweier windschiefer Geraden zu bestimmen !

Viel Erfolg !