Alle Lösungen ohne Gewähr, teilweise ohne Lösungsweg und unvollständig !
Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = (t^2 - tx)e^{-tx}$, $t \in \Re^{\neq 0}$

a) Untersuche f_t, indem Du eine Funktionsuntersuchung durchführst.
b) Bestimme die Ortskurve der Extrempunkte
c) Bestimme auf der Grundlage von a) die Eigenschaften der Funktion f_1.
d) Skizziere in verschiedenen Farben den Graphen von f_1 sowie die Ortskurve der Extrempunkte in ein Koordinatensystem.
e) Bestimme eine Stammfunktion von f_1.
f) Begründe, dass der Inhalt der Fläche, die der Graph von f_1 zwischen $1 \leq x < \infty$ mit der x-Achse einschließt einen endlichen Flächeninhalt hat und bestimme ihn.

Zu a)

$D(f) = \Re; W(f) = \Re^{\geq -e^{-t^2-1}}$ (y-Koordinate aller Tiefpunkte)
Symmetrie: Keine Symmetrie erkennbar

Verhalten für $x \to \pm\infty$ für t > 0:	t<0:
$x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 0$	$x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$	$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow t^2 = tx \Leftrightarrow x = t$

Extrempunkte

$f_t'(x) = e^{-tx}(-t - t^3 + t^2x); f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = t + \frac{1}{t}$

$f_t''(x) = e^{-tx}(2t^2 + t^4 - t^3x)$;

$f_t''(t + \frac{1}{t}) = e^{-t(t+\frac{1}{t})}(2t^2 + t^4 - t^3(t + \frac{1}{t}) = e^{-t^2-1}(t^2 + t^4) > 0 \forall t \in \Re^{\neq 0}$

Alle Tiefpunkte liegen bei $T(t + \frac{1}{t} / f(t + \frac{1}{t})$

$$f(t + \frac{1}{t}) = (t^2 - t(t + \frac{1}{t}))e^{-t(t+\frac{1}{t})} = (t^2 - t^2 - 1)e^{-t^2-1} = -e^{-t^2-1}$$

Wendepunkte

$f_t''(x) = e^{-tx}(2t^2 + t^4 - t^3x)$

$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t^4 = t^3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{t} + t$; $f_t'''(\frac{2}{t} + t) \neq 0 \forall t \in \Re^{\neq 0}$

Alle Wendepunkte liegen bei $W(\frac{2}{t}+t / f(\frac{2}{t}+t)$; $f(\frac{2}{t}+t)=(t^2-t(t+\frac{2}{t}))e^{-t(\frac{2}{t}+t)}=-2e^{-2-t^2}$

Zu b) Bestimmung der Ortskurve:

$$x=t+\frac{1}{t}; y=-e^{-t^2-1}$$

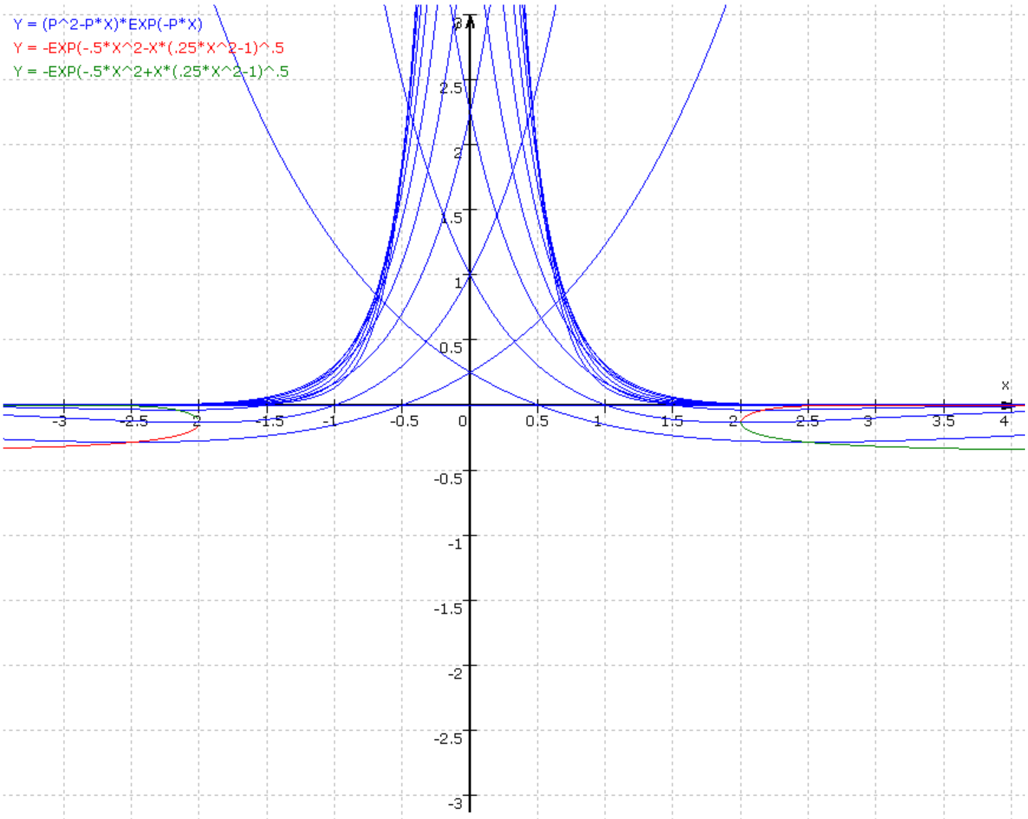
$$xt=t^2+1$$
$$\Leftrightarrow t^2-xt+1=0$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1}$$

Eingesetzt in die y-Koordinate für t ergibt: $y=-e^{-(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1})^2-1}$ bzw $y=-e^{-(\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1})^2-1}$

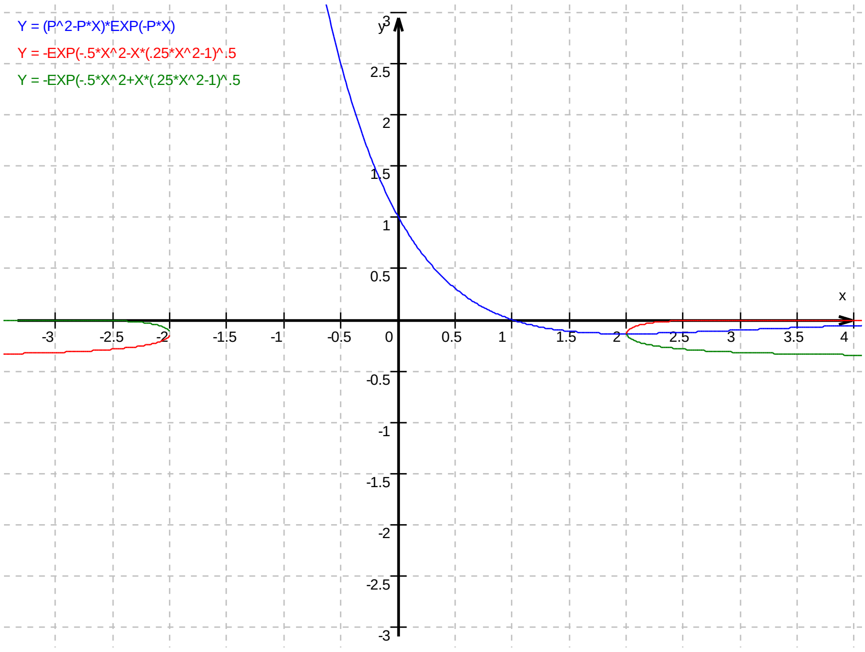
Vereinfacht: $y=-e^{-\frac{1}{2}x^2-x\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1})}$ bzw $y=-e^{-\frac{1}{2}x^2+x\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1})}$

(jeweils für t>0 und t<0)

Skizze für mehrere Werte von t:



Skizze nur für t=1



e) Stammfunktion mittels partieller Integration:

$$\int (t^2 - tx)e^{-tx}dx = e^{-tx}(x - t + \frac{1}{t})$$

f) $\int\limits_1^{\infty}(1-x)e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}(1-x)e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} be^{-b} - (\frac{1}{e}) = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

Es existiert ein Grenzwert (s.Rechnung) Der Flächeninhalt beträgt $A = \left|-\frac{1}{e}\right| \approx 0{,}368$

Aufgabe 2

9 Betrachtet werden die Punkte $O(0|0|0)$, $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$ und $C(0|0|1)$ sowie die Punkte $P(t|0|t)$ und $Q(1-2t|t|t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Schneiden sich die Geraden durch B und P sowie durch O und Q, wenn man $t = \frac{1}{2}$ wählt?

b) Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, sodass die Richtungsvektoren der Geraden durch B und P sowie die Gerade durch O und Q linear abhängig sind?

c) Wie muss t gewählt werden, damit die Geraden durch B und P sowie die Gerade durch O und Q sich schneiden? Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S. Die Gerade durch die Punkte C und S schneidet die Ebene, in der die Punkte O, A und B liegen, in einem Punkt R. Berechnen Sie die Koordinaten von R.

~~d)~~ Wie muss t gewählt werden, damit der Punkt $U(t|t|t)$ in der gleichen Ebene liegt wie die Punkte A, B und C?

e) Wie muss t gewählt werden, damit die Geraden durch B und P sowie die Gerade durch O und $U(t|t|t)$ sich schneiden? Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes T.

f) Zeigen Sie, dass R der Schwerpunkt des Dreiecks OAB ist.

g) Zeigen Sie: Wählt man t so, dass der Punkt $U(t|t|t)$ in der gleichen Ebene liegt wie die Punkte A, B und C, dann ist U der Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

9 a) Gerade durch B und P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; Gerade durch O und Q: $\vec{x} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die beiden Geraden sind zueinander windschief.

b) Nein

c) $t = 0 \Rightarrow S(0|0|0)$; $t = \frac{1}{3} \Rightarrow S\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{4}\right)$; $R\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{3}\middle|0\right)$

d) $t = \frac{1}{3}$

e) $t \neq 0$ und $t \neq -1$; $T\left(\frac{t}{1+t}\middle|\frac{t}{1+t}\middle|\frac{t}{1+t}\right)$

f) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OR}$

Aufgabe 3

Bestimme die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme:

4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter r.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4r \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 8r \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6r \\ 3x_2 - x_3 &= r - 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + rx_2 + rx_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3rx_2 + rx_3 &= -5 \\ 3x_1 + 5rx_2 + r^2x_3 &= r - 2 \end{aligned}$$

4

a) Lösungsmenge:

$L_r = \left\{\left(\frac{14r+18}{5}; \frac{24r+18}{5}; 4r+6\right)\right\}$

b) Lösungsmenge:

$L_r = \left\{\left(5 - r; \frac{27r-36}{6}; \frac{25r-32}{2}\right)\right\}$

c) Stufenform:

$$\begin{aligned} x_1 + rx_2 + rx_3 &= 5 \\ rx_2 - rx_3 &= -15 \\ (r^2 - r)x_3 &= r + 13 \end{aligned}$$

Lösungsmengen:

$L_0 = \{\}$, $L_1 = \{\}$,

$L_r = \left\{\left(\frac{28-14r}{r^2-r}; \frac{18r-46}{r-1}; \frac{r+13}{r^2-r}\right)\right\}$ für $r \neq 0$, $r \neq 1$

Aufgabe 4

Stelle den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Folgen LGS ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$ Lösung: r = s = t = 1

Aufgabe 5

Zeichne folgende Vektoren in ein Koordinatensystem ein:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} - 3\vec{b}$ d) $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

Aufgabe 6

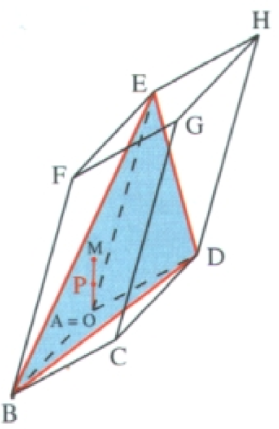


Fig. 1

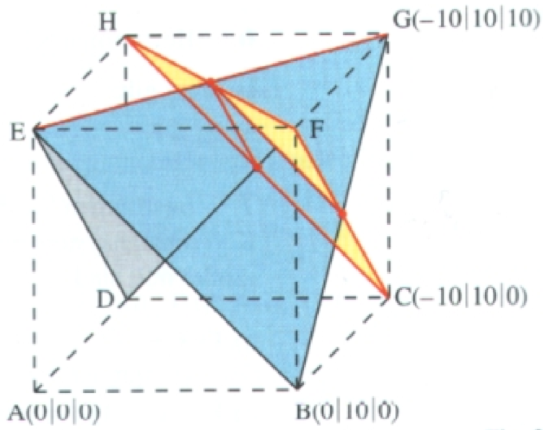


Fig. 2

11 Der Spat in Fig. 1 wird durch die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

a) M ist der Mittelpunkt des Parallelogramms BCGF. Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes

(1) der Strecke AM durch das Dreieck BDE,
(2) der Strecke DM durch das Dreieck ACH,
(3) der Strecke EM durch das Dreieck AFH,
(4) der Strecke HM durch das Dreieck DEG.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene

(1) durch die Punkte B, F und H in Fig. 1,
(2) durch die Punkte A, C und G in Fig. 1,
(3) durch die Punkte D, E und G in Fig. 1,
(4) durch die Punkte A, B und H in Fig. 2,
(5) durch die Punkte D, E und G in Fig. 2,
(6) durch die Punkte A, C und G in Fig. 2.

11 a) (1) $D(1{,}5|0{,}5|1)$; (2) $D(0|1|1)$; (3) $D(1|1|3)$; (4) $D(-0{,}5|1{,}5|3)$
b) (1) $4x_1 + 32x_2 - 7x_3 = 20$; (2) $4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0$; (3) $8x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$
(4) $x_1 + x_3 = 0$; (5) $x_1 + x_2 + x_3 = -10$; (6) $x_1 + x_2 = 0$

Aufgabe 7

5 Bestimmen Sie a, b, c $\in \mathbb{R}$ in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ so, dass gilt:

a) g liegt in E,
b) g ist parallel zu E, liegt aber nicht in E,
c) g schneidet E.

5 a) $2a - 3b = -63$ und $c = \frac{2}{9}$
b) $2a - 3b = -63$ und $c \neq \frac{2}{9}$
c) $2a - 3b \neq -63$

Aufgabe 8

Was versteht man unter den Begriffen „linear abhängig“ und „linear unabhängig“ ? Gib Beispiele an und die Definition !

s. Buch LS ! Die Definition reicht aus !

Aufgabe 9

Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge 4 durch die Ecken $A(0\,|\,0\,|\,0)$ und $G(4\,|\,4\,|\,4)$.

Hinweis: *Die Ecken aller grau unterlegten Vielecke haben nur* ***ganzzahlige*** *Koordinaten.*

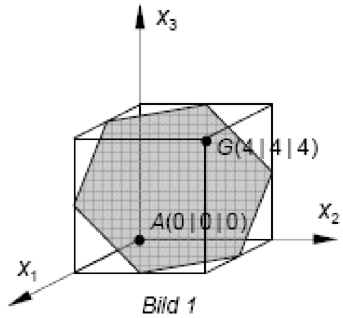


Bild 1

a) *Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E, in der das grau unterlegte Sechseck liegt, in Parameter- und Normalenform (Bild 1).* (9 P)

(Kontrollergebnis $E: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 6$)

b) *Berechnen Sie den Abstand der Ebene E vom Ursprung und ermitteln Sie die Größe des Winkels, den die Ebene E und die x_1-x_2-Ebene einschließen. (10 P)*

Die Ebene E gehört zur Ebenenschar $E_r: \begin{pmatrix}r\\r\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 4r + 2$.

c) *Prüfen Sie jeweils, ob die Ebenen, in denen die grau unterlegten Flächen liegen (Bild 2 bzw. Bild 3), auch zur Ebenenschar E_r gehören.* (10 P)

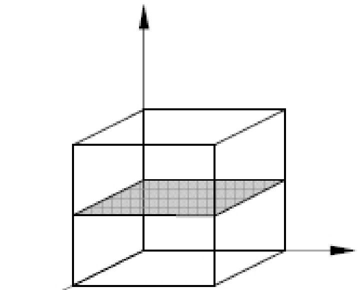


Bild 2

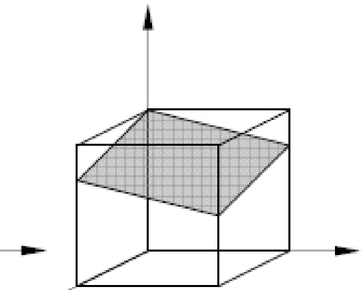


Bild 3

d) Entscheiden Sie, ob das graue

Bild 2 *Bild 3*

d) *Entscheiden Sie, ob das graue Viereck in Bild 3 ein Quadrat ist.* (5 P)

e) *Untersuchen Sie in Abhängigkeit von r, ob die Ebenen der Schar E_r und die Raumdiagonale durch die Punkte A und G Schnittpunkte besitzen.* (11 P)

f) *Ermitteln Sie den Teil des Würfelvolumens, der unterhalb des grauen Vierecks in Bild 3 liegt.*

	Lösungsskizze
a	Mögliche abgelesene Punkte: $R(4\mid 0\mid 2)$, $S(4\mid 2\mid 0)$ und $T(2\mid 4\mid 0)$ Parameterform: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$. Normalenform: Mit $\vec{n}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist $E:\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}=6$.
b	Bei Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehung ergibt sich $d=2\sqrt{3}$ $\cos(\alpha)=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad\alpha\approx 54{,}7^\circ$
c	Die zu *Bild 2* gehörige Ebene liegt parallel zur x_1-x_2-Ebene und geht durch den Punkt $(0\mid 0\mid 2)$. Ihre Gleichung ist daher $E_0:\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=2$. Also $r=0$. Der Punkt $(4\mid 0\mid 3)$ gehört zur grau unterlegten Ebene im Bild 3, aber wegen $\begin{pmatrix}r\\r\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}=4r+3\neq 4r+2$ zu keiner der Ebenen E_r.
d	Abgelesene Eckpunkte: $K(0\mid 0\mid 4)$, $L(4\mid 0\mid 3)$, $M(4\mid 4\mid 2)$ und $N(0\mid 4\mid 3)$ Die Diagonalen sind unterschiedlich lang: $\lvert\overrightarrow{KM}\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}\right\rvert>\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right\rvert=\lvert\overrightarrow{LN}\rvert$ bzw. die Seitenvektoren nicht orthogonal: $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{LM}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}\neq 0$. Das Viereck ist kein Quadrat [, sondern eine Raute].
e	Einsetzen von $\vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ in die Gleichung der Ebenenschar E_r ergibt: $t(2r+1)=4r+2$ <u>1. Fall</u> $\quad r=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ g_{AG}\subset E_{-\frac{1}{2}}$ <u>2. Fall</u> $\quad r\neq-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ t=2$, d.h., alle Ebenen der Ebenenschar E_r schneiden die Raumdiagonale in $S(2\mid 2\mid 2)$
f	Das Volumen des ganzen Würfels beträgt $V_W=64\,[VE]$. Durch die Ebene $x_3=2$ wird der Würfel in zwei gleich große Quader zerlegt. Die grau unterlegte Fläche halbiert aus Symmetriegründen den oberen Quader. Daraus ergibt sich für das gesuchte Volumen $V=\frac{3}{4}\cdot 64=48\,[VE]$.

Bemerkung: Einige Aufgabe der Aufgabe 9 sind nicht im Unterricht behandelt wordenund sind nicht Gegenstand der Klausur ! (Jahrgang 2006)