Lösung

1. a) Die Gerade h verläuft parallel zu einer Ebene der Schar, wenn das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden den Wert null ergibt. Der Normalenvektor lässt sich aus den Koeffizienten der Koordinatenform der Ebenengleichung ablesen.

$$\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

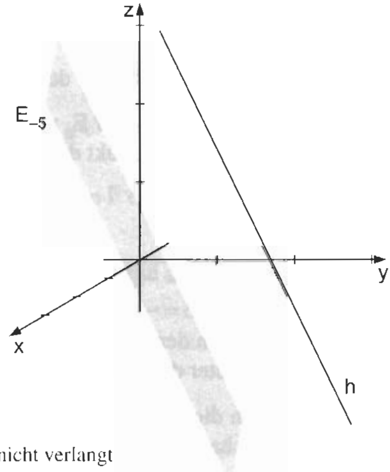
$$-a - 4a - 25 = 0$$

$$a = -5$$

Die Gerade h verläuft parallel zur Ebene

$E_{-5}: -5x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 0$

bzw. $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$



Skizze nicht verlangt

Zur Überprüfung, ob die Gerade in der Ebene liegt, kann man die Koordinaten des Anbindungspunktes der Geraden in die Koordinatenform der Ebenengleichung einsetzen (Punktprobe).

$$-5 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 0$$

$$40 = 0$$

Die Gerade h liegt nicht in der Ebene E_{-5}.

b) Die Gerade h steht senkrecht auf einer Ebene der Schar, wenn der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden linear abhängig sind.

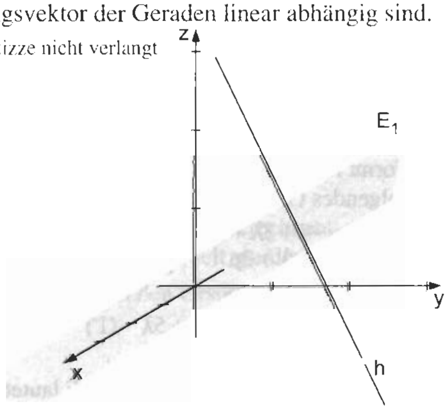
$$\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= -\lambda \\ -2a &= 2\lambda \\ 5 &= -5\lambda \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, \ a = 1$$

Die Gerade h steht senkrecht auf der Ebene

$E_1: x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0.$

Skizze nicht verlangt



Setzt man die Koordinaten der Geradengleichung in die Koordinatenform der Ebenengleichung E_1 ein

$$\begin{aligned} 3-\lambda-2(3+2\lambda)+5(5-5\lambda)&=0\\ 3-\lambda-6-4\lambda+25-25\lambda&=0\\ 22&=30\lambda\\ \lambda&=\frac{11}{15}, \end{aligned}$$

so erhält man mit $\lambda=\frac{11}{15}$ den Schnittpunkt $S\left(2\frac{4}{15}\,\middle|\,4\frac{7}{15}\,\middle|\,1\frac{1}{3}\right)$.

c) Zwei Ebenen der Schar E_a und E_b, $a \neq b$, stehen dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Normalenvektoren der Ebenen gleich null ist.

$$\begin{pmatrix} a\\ -2a\\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b\\ -2b\\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} ab+4ab&=-25\\ a\cdot b&=-5 \end{aligned}$$

Zwei Ebenen der Schar stehen dann senkrecht aufeinander, wenn das Produkt der Parameter den Wert –5 ergibt.

d) Setzt man die Koordinaten der Geradengleichung in die Gleichung der Ebenenschar ein

$$\begin{aligned} a(-2+2\lambda)-2a(-1+\lambda)+5\cdot 0&=0\\ -2a+2a\lambda+2a-2a\lambda&=0\\ 0&=0, \end{aligned}$$

so erhält man eine wahre Aussage. Die Gerade liegt also in allen Ebenen der Schar.

Da die 3. Komponente des Anbindungs- und des Richtungsvektors der Geraden gleich null ist, liegt sie in der x_1-x_2-Ebene (Grundrissebene).

2. Mit A als Anbindungspunkt und den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren lautet die Drei-Punkteform der Ebene:

$$F:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}$$

Formt man die Parameterform um in drei Koordinatengleichungen, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

I $\quad x=-1+3\lambda+4\mu$
II $\quad y=1-\lambda+2\mu$
III $\quad z=1+\lambda$

I – 2 · II $\quad x-2y=-3+5\lambda \quad$ (I')
I' – 5 · III $\quad x-2y-5z=-8$

Die Koordinatenform der Ebene F lautet $x_1-2x_2-5x_3=-8$.

Die Koeffizienten der Ebene E_{-1} und F sind Vielfache (Gegenzahlen) voneinander. Die Ebenen sind somit parallel.

Alternativ:
Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Spannvektoren einer Ebene, so steht der Normalenvektor der Ebene senkrecht zu diesen Vektoren.

Ist $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1\\ n_2\\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene, so gilt:

I $\quad 3n_1-n_2+n_3=0$
II $\quad 4n_1+2n_2=0 \Rightarrow n_2=-2n_1$

Wählt man $n_1=1$, so ist $n_2=-2$ und $n_3=-5$.

Mit $\vec{n}=\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -5 \end{pmatrix}$ und dem Anbindungspunkt der Ebene F erhält man die Punkt-Normalenform F: $\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und daraus die allgemeine Normalenform $\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 8 = 0$.

Die Ebene E_{-1} hat die allgemeine Normalenform $\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$.

Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig, die Ebenen sind somit parallel.

Alternative Lösung:
Setzt man die Koordinatengleichungen der Ebene F in die Koordinatenform der Ebene E_{-1} ein,

$$\begin{aligned} -(-1+3\lambda+4\mu)+2(1-\lambda+2\mu)+5(1+\lambda)&=0\\ 1-3\lambda-4\mu+2-2\lambda+4\mu+5+5\lambda&=0\\ 8&=0, \end{aligned}$$

so erhält man eine falsche Aussage. Da sich die Ebenen nicht schneiden, sind sie parallel.

3. a) Multipliziert man den Ortsvektor des Punktes P mit der vorgegebenen Abbildungsmatrix, so erhält man die Koordinaten des Bildpunktes.

$$\vec{p}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ -3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Da in der Aufgabenstellung der Operator „berechnen" steht, kann die Größe des Winkels nicht zeichnerisch ermittelt werden.

Die Abbildungsmatrix A zu einer Drehung um den Ursprung um den Winkel φ hat die Form $A=\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Vergleicht man die allgemeine Abbildungsmatrix einer Drehung mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

so erhält man die Gleichungen $\sin(\varphi) = -1$ und $\cos(\varphi) = 0$. Diese Gleichungen sind erfüllt für $\varphi = 270°$.

Alternativer Lösungsweg 1 (Winkel zwischen Vektoren)
Werden zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ von einem Punkt aus abgetragen, so gilt für den Winkel φ zwischen den Vektoren $\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

Für den Winkel φ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OP'}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OP'}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{5 \cdot 5} = \frac{0}{25} = 0 \Rightarrow \varphi = 90° \text{ oder } \varphi = 270°$$

Der Punkt P liegt im 1. Quadranten, der Punkt P' im 4. Quadranten. Da die Drehung gegen den Uhrzeiger erfolgt, beträgt der Drehwinkel somit 270°.

Alternativer Lösungsweg 2 (Kosinussatz)
Es ist $|\overrightarrow{OP}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 5\,[LE]$, $|\overrightarrow{OP'}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = 5\,[LE]$ und

$|\overrightarrow{PP'}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{50}\,[LE]$.

Ist φ der Winkel zwischen den Dreieckseiten OP und OP' sowie PP' die Seite, die dem Winkel φ gegenüberliegt, so gilt nach dem Kosinussatz:

$\overline{PP'}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OP'} \cdot \cos(\varphi)$

$\sqrt{50}^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$ oder $\varphi = 270°$

Der Punkt P liegt im 1. Quadranten, der Punkt P' im 4. Quadranten. Da die Drehung gegen den Uhrzeigersinn erfolgt, beträgt der Drehwinkel somit 270°.

b) Die Abbildung α ist eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden mit der Gleichung $y = mx$. Diese Gerade g ist z. B. festgelegt durch die Punkte $P_1(0|0)$ und $P_2(2|1)$.

Es ist $m = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$.

Alternativ:
Schreibt man die Gleichung der Gerade um zu $x - 2y = 0$, so erhält man durch Umformen die Gleichung $y = 0{,}5x$.

Für g: $y = 0{,}5x$ ist $\varphi = \arctan(0{,}5) \approx 26{,}565°$. Die Abbildungsmatrix α ist

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(53{,}13) & \sin(53{,}13) \\ \sin(53{,}13) & -\cos(53{,}13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Ist $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix von β, so gilt für die **Verkettung** $\gamma = \beta \circ \alpha$

der Abbildungen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}$.

Nach der Multiplikation der Matrizen erhält man folgendes Gleichungssystem:

I $\quad 0{,}6a + 0{,}8b = 0$
II $\quad 0{,}8a - 0{,}6b = 1$
III $\quad 0{,}6c + 0{,}8d = -1$
IV $\quad 0{,}8c - 0{,}6d = 0$

$3 \cdot \text{I} + 4 \cdot \text{II}$	$5a = 4$	$\Rightarrow a = 0{,}8$,
a in I oder II		$\Rightarrow b = -0{,}6$
$3 \cdot \text{III} + 4 \cdot \text{IV}$	$5c = -3$	$\Rightarrow c = -0{,}6$,
c in III oder IV		$\Rightarrow d = -0{,}8$

Die Abbildung β hat die Abbildungsmatrix $B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$.

Vergleicht man diese Matrix mit der allgemeinen Form der Abbildungsmatrix zu einer Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, die mit der x-Achse den Winkel φ einschließt $\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$, so erhält man

$\sin(2\varphi) = -0{,}6$ und $\cos(2\varphi) = 0{,}8$
bzw. $2\varphi = \arcsin(-0{,}6)$ und $2\varphi = \arccos(0{,}8)$.

Diese Gleichungen sind erfüllt für $\varphi \approx -18{,}435°$ (Winkel gemessen im Uhrzeigersinn, dieser Winkel entspricht $\varphi \approx 341{,}565°$ gegen den Uhrzeigersinn).
Für die Steigung m der gesuchten Ursprungsgerade gilt:
$m = \tan(\varphi)$

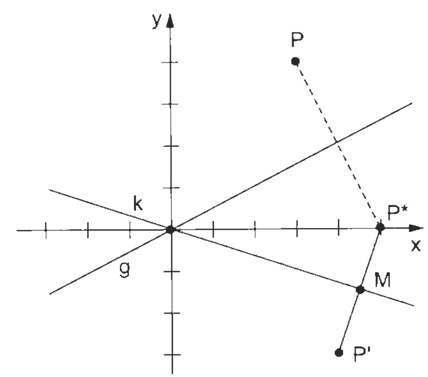
$m = \tan(-18{,}435°) \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

Die Gleichung der Ursprungsgeraden k ist somit k: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Alternativer Rechenweg:
Zur Spiegelung an der Geraden g gehört die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}$. Spiegelt man den Punkt P an der Geraden g, so erhält man den Punkt P*

$\vec{p}^* = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Spiegelungspunkt von P* an der Ursprungsgeraden k ist der Punkt P'(4|−3) (vgl. Aufgabenteil 3 a). Die Spiegelgerade k ist die



Skizze nicht verlangt

Mittelsenkrechte der Strecke [P*P']. Da k eine Ursprungsgerade ist, verläuft die Gerade durch den Mittelpunkt $M(4{,}5 \mid -1{,}5)$ der Strecke [P*P']

$\vec{m} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}4{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ und dem Ursprung.

Die Steigung dieser Geraden ist $m = \frac{-1{,}5-0}{4{,}5-0} = -\frac{1}{3}$, die Gleichung der Ursprungsgeraden k somit $y = -\frac{1}{3}x$.

Die Ursprungsgerade k schließt mit der x-Achse einen Winkel $\varphi = -18{,}435°$ ein.

Die Abbildung β hat die Abbildungsmatrix

$$B = \begin{pmatrix}\cos(2\varphi) & \sin(2\varphi)\\ \cos(2\varphi) & -\cos(2\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}6\\ -0{,}6 & -0{,}8\end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe 1

Es ist hilfreich eine Übergangstabelle mit diesen Randbeschriftungen anzufertigen:

von / nach	+	0	–
+			
0			
–			

Teilaufgabe 2

a) Multiplizieren Sie die Übergangsmatrix Z mit dem Vektor $\vec{k}_1$, wobei $\vec{k}_1$ die Kundenzufriedenheit in der 1. Woche wiedergibt.

b) Drücken Sie die Kundenzufriedenheit zu Beginn der Untersuchung durch den Vektor $\vec{k}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ aus.

Die Kundenzufriedenheit in der 1. Woche ist gleich dem Produkt aus der Übergangsmatrix und dem „Kundenzufriedenheitsvektor" zu Beginn der Untersuchung.

Lösen Sie das entstehende Gleichungssystem nach den Variablen a, b und c auf.

Teilaufgabe 3

Multiplizieren Sie die Übergangsmatrix mit sich selbst.

Entnehmen Sie der Ergebnismatrix die Wahrscheinlichkeiten, die den Wechsel von sehr zufrieden (+) nach zufrieden (0) oder nicht zufrieden (–) angeben.

Alternativ: Zeichnen Sie einen zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Übergängen von + nach 0 oder –.

Wenden Sie die Pfadmultiplikationsregel an, um die Wahrscheinlichkeiten für den Wechsel von sehr zufrieden (+) nach zufrieden (0) bzw. nicht zufrieden (–) zu bestimmen.

Teilaufgabe 4

Drücken Sie die langfristige Kundenzufriedenheit durch den Vektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ aus.

Bei der langfristigen Kundenzufriedenheit ändern sich die prozentualen Anteile nicht mehr. Das Produkt aus Zufriedenheitsmatrix und langfristigem Vektor ergibt den langfristigen Vektor.

Lösen Sie das entstehende Gleichungssystem nach den Variablen a, b und c auf.

Beachten Sie, dass die Summe der drei Variablen a, b und c den Wert 1 hat.

Teilaufgabe 5

Die Zufriedenheitsmatrix ist eine stochastische Matrix.

In einer stochastischen Matrix ist die Summe der Spaltenelemente gleich 1.

Das Produkt aus Übergangsmatrix und stationärem (stabilen) Vektor ist der stationäre (stabile) Vektor.

Beachten Sie beim Übertragen der Werte der Zufriedenheitsmatrix in ein Übergangsdiagramm die Richtung der Pfeile.

Lösung

1. Die Übergangstabelle (nicht verlangt) mit den Randbeschriftungen ist

von / nach	+	0	–
+	0,6	0,2	0
0	0,3	0,5	0,5
–	0,1	0,3	0,5

Somit ist die Übergangsmatrix $Z = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

2. a) Gibt $\vec{k}_1$ die Kundenzufriedenheit in der 1. Woche wieder, so berechnet sich die Kundenzufriedenheit in der 2. Woche als Produkt der Übergangsmatrix Z mit dem Vektor $\vec{k}_1$, d. h. $\vec{k}_2 = Z \cdot \vec{k}_1$.

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}32 \\ 0{,}42 \\ 0{,}26 \end{pmatrix}$$

Die Kundenzufriedenheit in der 2. Woche ändert sich zu +: 32 %, 0: 42 % und –: 26 %.

b) Die Kundenzufriedenheit zu Beginn der Untersuchung ist unbekannt. Beträgt der Anteil der sehr zufriedenen Kunden (+) a, der Anteil der zufriedenen Kunden (0) b und der Anteil der nicht zufriedenen Kunden (–) c, so gilt:

$$\vec{k}_1 = Z \cdot \vec{k}_0$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Nach der Multiplikation der Matrix mit dem „Zufriedenheitsvektor" erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0{,}6a+0{,}2b=0{,}4 \Rightarrow b=2-3a \\ \text{II} & 0{,}3a+0{,}5b+0{,}5c=0{,}4 \\ \text{III} & 0{,}1a+0{,}3b+0{,}5c=0{,}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II}-\text{III} & 0{,}2a+0{,}2b=0{,}2 & |:0{,}2 \\ & a+b=1 & (\text{I}') \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b \text{ in I}' & a+2-3a=1 \\ & -2a=-1 \\ & a=0{,}5 \\ & b=2-3\cdot 0{,}5=0{,}5 \end{array}$$

Die Übergangsmatrix ist eine stochastische Matrix, bei der die Summe der Spaltenelemente den Wert 1 ergibt.

Daher muss $c=0$ sein.

Alternative Berechnung von c durch Einsetzen von a und b in II:

$$0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5c=0{,}4$$
$$0{,}5c=0$$
$$c=0$$

Das Marktforschungsunternehmen geht also zu Beginn der Untersuchung davon aus, dass es nur sehr zufriedene oder zufriedene Kunden gibt. Die Anteile sind gleich groß.

Quadriert man die Übergangsmatrix Z, so gibt die Summe der Elemente k_{+0} und k_{+-} den Prozentsatz p der Kunden an, deren Zustimmung zu den Angeboten innerhalb von 2 Wochen von sehr zufrieden (+) nach zufrieden (0) oder nicht zufrieden (–) wechselt.

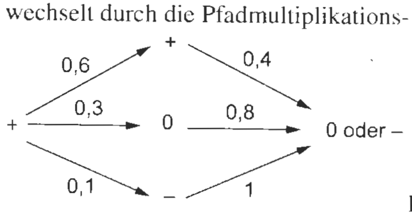
$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}22 & 0{,}1 \\ 0{,}38 & 0{,}46 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}32 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$p=0{,}38+0{,}2=0{,}58$

Bei 58 % der Kunden wechselt die Zufriedenheit innerhalb von 2 Wochen von sehr zufrieden (+) nach zufrieden (0) oder nicht zufrieden (–).

Alternativer Lösungsweg:

Zeichnet man einen zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Übergängen von + nach 0 bzw. –, so erhält man den Prozentsatz p der Kunden, deren Zufriedenheit von sehr zufrieden (+) nach zufrieden (0) oder nicht zufrieden (–) wechselt durch die Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel.



$p=0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 1=0{,}58$

4. Bei der langfristigen Kundenzufriedenheit ändern sich die prozentualen Anteile nicht mehr, d. h. es gilt $Z\cdot\vec{k}=\vec{k}$.

Beträgt der Anteil der sehr zufriedenen Kunden (+) a, der Anteil der zufriedenen Kunden (0) b und der Anteil der nicht zufriedenen Kunden (–) c, so gilt:

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nach der Multiplikation der Matrix mit dem „Zufriedenheitsvektor" erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0{,}6a+0{,}2b=a \\ \text{II} & 0{,}3a+0{,}5b+0{,}5c=b \\ \text{III} & 0{,}1a+0{,}3b+0{,}5c=c \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & b=2a \\ \text{II} & 0{,}3a-0{,}5b+0{,}5c=0 \\ \text{III} & 0{,}1a+0{,}3b-0{,}5c=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b=2a \text{ in II} & 0{,}3a-a+0{,}5c=0 \\ & 0{,}5c=0{,}7a \\ & c=1{,}4a \end{array}$$

Da die Summe der prozentualen Anteile 1 ergibt, gilt:

$a+2a+1{,}4a=1$

$4{,}4a=1$

$a=\frac{10}{44}=\frac{5}{22}\approx 22{,}7\,\%,\ \ b=2\cdot\frac{5}{22}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}\approx 45{,}5\,\%,\ \ c=1{,}4\cdot\frac{5}{22}=\frac{7}{22}\approx 31{,}8\,\%$

Langfristig sind 22,7 % der Kunden mit den Sonderangeboten sehr zufrieden (+), 45,5 % der Kunden zufrieden (0) und 31,8 % nicht zufrieden (–).

5. Da es sich um eine stochastische Matrix handelt, gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & q+0{,}6+0{,}3=1 \Rightarrow q=0{,}1 \\ \text{II} & q+r+s=1 \end{array}$$

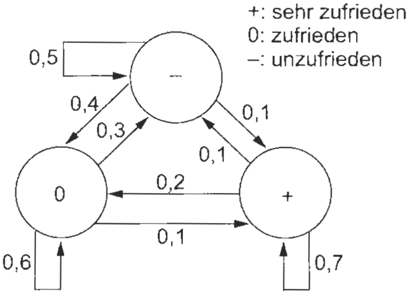
Multipliziert man die Übergangsmatrix mit dem stationären (stabilen) Vektor, so ist das Ergebnis wieder der stabile Vektor.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & r \\ 0{,}1 & 0{,}3 & s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}4375 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}4375 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{III} & 0{,}2\cdot 0{,}25+0{,}6\cdot 0{,}4375+0{,}3125r=0{,}4375 \\ & 0{,}05+0{,}2625+0{,}3125r=0{,}4375 \\ & 0{,}3125r=0{,}125 \\ & r=0{,}4 \end{array}$$

q und r in II $\quad 0{,}1+0{,}4+s=1 \Rightarrow s=0{,}5$

Die Zufriedenheitsmatrix ist $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ und das zugehörige Übergangsdiagramm ist:



Alternative Berechnung:

Multipliziert man die Übergangsmatrix mit dem langfristigen Zufriedenheitsvektor, so erhält man den langfristigen Zufriedenheitsvektor.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & q & q \\ 0{,}2 & 0{,}6 & r \\ 0{,}1 & 0{,}3 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}4375 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}4375 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}75q + 0{,}175 \\ 0{,}3125r + 0{,}3125 \\ 0{,}3125s + 0{,}15625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}4375 \\ 0{,}3125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}75q \\ 0{,}3125r \\ 0{,}3125s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}075 \\ 0{,}125 \\ 0{,}15625 \end{pmatrix} \Rightarrow q = 0{,}1,\ r = 0{,}4 \text{ und } s = 0{,}5$$

1. Mit A als Anbindungspunkt und $\vec{AB}$ sowie $\vec{AC}$ als Spannvektoren der Ebene erhält man die Dreipunkteform der Ebenengleichung

$$E = E_{ABC}:\ \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}.$$

Schreibt man die Vektorgleichung der Ebene um in drei Koordinatengleichungen und eliminiert die Parameter λ und μ, so erhält man die Koordinatenform der Ebenengleichung.

I $\quad x = 3\lambda + \mu$

II $\quad y = 6\mu$

III $\quad z = 6\lambda + 2\mu$

$2 \cdot \text{I} - \text{III}:\ 2x - z = 0$

Die Ebene E hat die Koordinatengleichung $2x - z = 0$.

Anmerkung: Die Parameter λ und μ sind durch Subtraktion der Gleichungen I und III bereits eliminiert. Daher braucht Gleichung II nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Alternativer Rechenweg: (mithilfe der Punkt-Normalenform)

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Spannvektoren einer Ebene, so steht der Normalenvektor der Ebene senkrecht zu diesen Vektoren.

Ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene, so gilt:

I $\quad 3n_1 + 6n_3 = 0 \ \Rightarrow\ n_1 = -2n_3$

II $\quad n_1 + 6n_2 + 2n_3 = 0$

$n_1 = -2n_3$ in II: $-2n_3 + 6n_2 + 2n_3 = 0 \ \Rightarrow\ n_2 = 0$

Wählt man $n_3 = 1$, so ist $n_1 = -2$ und $n_2 = 0$.

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ und dem Anbindungspunkt der Ebene E erhält man die Punkt-

Normalenform E: $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$ und daraus die Koordinatenform $-2x + z = 0$.

Der Punkt $D_k(5-2k\,|\,1\,|\,k)$ liegt in der Ebene E, wenn seine Koordinaten die Koordinatenform der Ebenengleichung erfüllen.

$$\begin{aligned} -2 \cdot (5-2k) + k &= 0 \\ -10 + 4k + k &= 0 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Für $k = 2$ liegt der Punkt in der Ebene.

Alternative Möglichkeit: (mithilfe der Parameterform der Ebenengleichung)

Setzt man für $\vec{x}$ den Ortsvektor des Punktes D_k ein, so erhält man die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}5-2k\\1\\k\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}.$$

Das gesuchte k erhält man, indem man die Vektorgleichung in drei Koordinatengleichungen umschreibt.

I $\quad 5 - 2k = 3\lambda + \mu$

II $\quad 1 = 6\mu \qquad \Rightarrow\ \mu = \frac{1}{6}$

III $\quad k = 6\lambda + 2\mu$

$\Rightarrow\ \mu = \frac{1}{6}$ in III: $k = 6\lambda + \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{k}{6} - \frac{1}{18}$

λ und μ in I:

$$\begin{aligned} 5 - 2k &= \frac{1}{2}k - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ 5 &= 2{,}5k \\ k &= 2 \end{aligned}$$

2. Zwei Vektoren stehen dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren den Wert null ergibt.

Es ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix};\ \overrightarrow{CD_k} = \begin{pmatrix}5-2k-1\\1-6\\k-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2k\\-5\\k-2\end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{CD_k} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4-2k\\-5\\k-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = 12 - 6k + 6k - 12 = 0.$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD_k}$ stehen für jedes k senkrecht zueinander.

3. Die Zwei-Punkteform der Geraden g_{BC} lautet:

$$g_{BC}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix}$$

Ein Punkt der Punkteschar liegt dann auf der Geraden, wenn die Koordinaten des Punktes die Geradengleichung erfüllen.

$$\begin{pmatrix}5-2k\\1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix}$$

Nach Umschreiben der Vektorgleichung in die Koordinatengleichungen erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 5-2k=3-2\lambda & \\ \text{II} & 1=6\lambda & \Rightarrow \lambda=\frac{1}{6} \\ \text{III} & k=6-4\lambda & \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{6}$ in III: $k=6-\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$

Probe mit I: $5-2k=5-2\cdot 5\frac{1}{3}=-5\frac{2}{3}$

$3-2\lambda=3-2\cdot\frac{1}{6}=2\frac{2}{3}$

$-5\frac{2}{3}\neq 2\frac{2}{3} \Rightarrow$ falsche Aussage

Es gibt kein k so, dass ein Punkt der Punkteschar D_k auf der Geraden g_{BC} liegt.

4. a) Mit dem Punkt D_k als Anbindungspunkt und dem Normalenvektor als Richtungsvektor erhält man für die Lotgerade ℓ die Punkt-Richtungsform

$$\ell\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5-2k\\1\\k\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Den Schnittpunkt von Lotgerade und Ebene erhält man durch Einsetzen der Koordinaten der Lotgeraden in die Koordinatenform der Ebenengleichung.

$-2\cdot(5-2k-2\lambda)+k+\lambda=0$

$-10+4k+4\lambda+k+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2-k$

Setzt man λ in die Gleichung der Lotgeraden ein, erhält man den Lotfußpunkt

$$\vec{x}_F=\begin{pmatrix}5-2k\\1\\k\end{pmatrix}+(2-k)\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $F(1\,|\,1\,|\,2)$.

b) Da die Koordinaten des Lotfußpunktes unabhängig von k sind, haben alle Punkte D_k den gleichen Lotfußpunkt. Daher liegen alle Punkte der Punkteschar D_k auf einer Geraden, die senkrecht auf E steht.

c) Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ berechnet sich nach der Formel $d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

Setzt man die Koordinaten des Lotfußpunktes und der Punkte der Schar in die Abstandsformel ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} d(F, D_k) &= \sqrt{(1-(5-2k))^2+(1-1)^2+(2-k)^2}=\sqrt{(2k-4)^2+(2-k)^2} \\ &= \sqrt{4k^2-16k+16+4-4k+k^2}=\sqrt{5k^2-20k+20} \\ &= \sqrt{5(k-2)^2}=\sqrt{5}\cdot|k-2| \end{aligned}$$

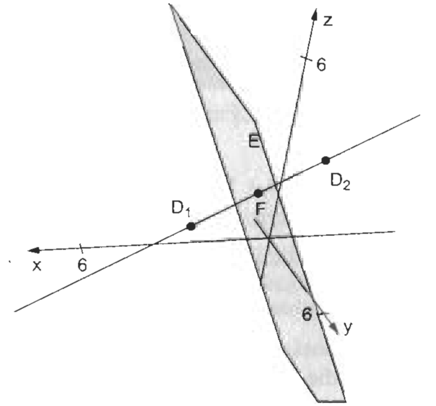
Setzt man den Abstand gleich $\sqrt{5}$ LE, so erhält man folgende Gleichung:

$\sqrt{5}\cdot|k-2|=\sqrt{5}$

$|k-2|=1$

$k=3 \vee k=1$

Die Punkte $D_1(3\,|\,1\,|\,1)$ und $D_3(-1\,|\,1\,|\,3)$ haben von der Ebene den Abstand $\sqrt{5}$ LE.



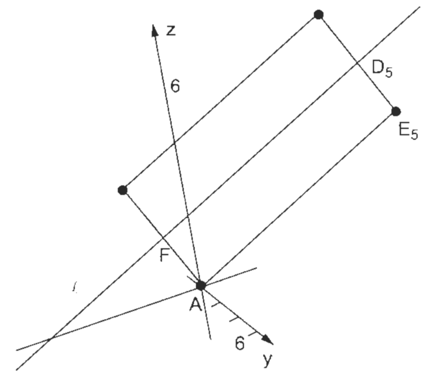
Skizze nicht verlangt

5. Die Rechteckseiten $[AE_k]$ und $[FD_k]$ sind parallel und gleich lang. Trägt man daher in A den Vektor $\overrightarrow{FD_k}$ an, so erhält man E_k.
Es ist

$$\overrightarrow{FD_k}=\begin{pmatrix}4-2k\\0\\k-2\end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{e}_k=\vec{a}+\overrightarrow{FD_k}=\begin{pmatrix}4-2k\\0\\2-k\end{pmatrix}.$$

Der Radius des Zylinders ist gleich der Strecke $[AF]$, die Höhe des Zylinders gleich der Strecke $[FD_k]$.



Skizze nicht verlangt für k = 5

Mit $|\overrightarrow{AF}|=\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{6}$ LE und $|\overrightarrow{FD_k}|=\sqrt{5}(k-2)$ (siehe Aufgabenteil 4 c)

(Die Betragsstriche können weggelassen werden, da $k>2$ gilt.) erhält man durch Einsetzen in die Volumenformel $V=\pi\cdot r^2\cdot h$ für den Zylinder:

$V=\pi\cdot\sqrt{6}^2\cdot\sqrt{5}(k-2)$

Gleichsetzen mit dem vorgegebenen Volumen ergibt folgende Gleichung:

$\pi\cdot 6\cdot\sqrt{5}(k-2)=18\cdot\sqrt{5}\cdot\pi$

$k-2=3$

$k=5$

Für $k=5$ beträgt das Volumen des Rotationskörpers $18\sqrt{5}\cdot\pi$ Volumeneinheiten.