Gymnasiale Oberstufe

Mathematik
Analytische Geometrie
Lineare Algebra

Lösungen zum Kapitel
7 Vermischte Aufgaben

Erarbeitet von Dr. Karsten Alpers
Dr. Gisela Bielig-Schulz
Thomas Epp
Prof. Dr. Thomas Jahnke
Martin Janßen
Angelika Siekmann
Ursula Simanowsky
Hans Wuttke

unter Mitarbeit der Verlagsredaktion

Cornelsen

7 Vermischte Aufgaben

7.1 Analytische Geometrie

319 **1 a)** Die Gleichung $\vec{x}_1 + r\vec{a}_2 = \vec{x}_2 + s\vec{a}_2$ besitzt keine Lösungen, also schneiden sich die Geraden nicht. Wegen $\vec{a} \neq t\vec{b}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sind sie auch nicht parallel.

b) $\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \varepsilon : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\vec{x} = 2.$

$$d = |(\vec{p} - \vec{p}_1) \cdot \vec{e}_n| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 8.$$

c) Lotfußpunktverfahren:

$$(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{a} - r(\vec{a} \cdot \vec{a}) + s(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0 \quad \wedge \quad (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{b} - r(\vec{a} \cdot \vec{b}) + s(\vec{b} \cdot \vec{b}),$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - r\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + s\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \wedge$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - r\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + s\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} -3 - 2r + s &= 0 \\ -4 - r + 5s &= 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad s = -\tfrac{11}{9};\ s = \tfrac{5}{9}.$$

Die Lotfußpunkte sind also $G\left(0 \,|\, \frac{20}{9} \,|\, -\frac{11}{9}\right)$ auf g_1 und $H\left(\frac{8}{9} \,|\, 4 \,|\, \frac{5}{9}\right)$ auf g_2.

Durch G und H ist die Gerade $g : \vec{x} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bestimmt.

Für den Abstand d gilt:

$$d = |\vec{h} - \vec{g}| = \left| \frac{8}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{8}{3}.$$

319

d) Sei Q mit dem Ortsvektor $\vec{q}$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden g_1. Die Verbindungsgerade l zwischen Q und P hat den Richtungsvektor $\vec{p}-\vec{q} = \begin{pmatrix}6\\1\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ und somit die Parametergleichung

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\1\\8\end{pmatrix} + st\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Alle Geraden dieser Geradenschar liegen in einer Ebene mit der Parametergleichung

$$\varepsilon:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\1\\8\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t,u\in\mathbb{R}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von ε und

$$-3x+2y+2z=2$$

eine Normalengleichung der Ebene. Falls es eine derartige Gerade gibt, dann muss

$$g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

die Ebene ε schneiden. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$-3(2-2b)+2\cdot 4+2b=2 \quad\Rightarrow\quad b=0.$$

Also liegt der Punkt $P_2(2\,|\,4\,|\,0)$ von g_2 auch in der Ebene ε und damit auf genau einer Verbindungsgerade l. Eine Parametergleichung von h ist beispielsweise

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}.$$

2 a) Wegen $g_1\cap g_2=\emptyset$ schneiden sich die Geraden nicht, und wegen

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix} \neq t\begin{pmatrix}-2\\-1\\6\end{pmatrix} \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}$$

sind die Geraden nicht parallel.

319 **b)** $\varepsilon:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \varepsilon:\ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\vec{x} = 18.$

Einsetzen der Koordinaten $(a\,|\,0\,|\,0)$, $(0\,|\,b\,|\,0)$ und $(0\,|\,0\,|\,c)$ in die Ebenengleichung ergibt die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$S_x(6\,|\,0\,|\,0),\ S_y(0\,|\,3\,|\,0) \text{ und } S_z(0\,|\,0\,|\,9).$$

c) $d = \left|\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 9 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 6$

Es ist $g':\ \vec{x} = \vec{x}_3 + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x_3} = \vec{x_1} - 2\cdot 6\cdot \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 22 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$.

d) $\alpha = 90°; \quad \vec{x}_4 = \vec{x}_1 - 6\cdot\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ -27 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad g_S:\ \vec{x} = \vec{x}_4 + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3 a) Eine Parametergleichung der Ebene ist

$$\varepsilon:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene erhält man mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_1 + 4n_2 + 3n_3 &= 0 \\ 3n_1 + 4n_2 - 3n_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 13$ und $|\vec{n}| = 7$ hat die Ebene die Hessegleichung

$$\varepsilon:\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\vec{x} = \frac{13}{7}.$$

Für den Abstand d des Punktes Q zur Ebene gilt: 319

$$d = \left| \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{13}{7} \right| = 3.$$

b) $\vec{q}\,' = \vec{q} + 2d \cdot \vec{e}_n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 43 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q(\frac{43}{7} \mid \frac{10}{7} \mid \frac{5}{7}).$

c) $6(4+t) - 3 \cdot 3 + 2(-1-t) = 13 \;\Rightarrow\; t = 0,$ der Schnittpunkt ist also $S(4 \mid 3 \mid -1)$.

$$\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{4}{7 \cdot \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 23,8^\circ.$$

d) Für den gesuchten Punkt $Q(0 \mid 0 \mid z)$ auf der z-Achse soll gelten:

$$(\vec{q} - \vec{p}_1) \cdot (\vec{q} - \vec{p}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4+z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z-2 \end{pmatrix} = z^2 + 2z - 15 = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man die beiden Lösungen $z_1 = -5$ und $z_2 = -3$. Es gibt also zwei derartige Punkte, nämlich $Q_1(0 \mid 0 \mid 3)$ und $Q_2(0 \mid 0 \mid -5)$.

4 a) Es ist $\varepsilon : \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 6$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 320

Wegen $|\vec{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3$ ist die Hesseform der Ebene

$$\varepsilon : \tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z = 2.$$

Hieraus folgt für den Abstand d der Ebene vom Ursprung:

$$d = 2.$$

Für den Ortsvektor $\vec{p}$ des Lotfußpunktes P gilt damit

$$\vec{p} = 2 \cdot \vec{e_n} = \tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{folglich ist} \quad P\left(\tfrac{4}{3} \mid -\tfrac{4}{3} \mid \tfrac{2}{3}\right).$$

320 **b)** Es ist $g: \vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten von $\vec{x}$ in die Ebenengleichung ergibt $2(9+7t) - 2(5+4t) + 4 + 4t = 6 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{5}$

Für den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schnittpunktes gilt damit

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 9 - \frac{21}{5} \\ 5 - \frac{12}{5} \\ 4 - \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ also } S\left(\tfrac{24}{5} \,\middle|\, \tfrac{13}{5} \,\middle|\, \tfrac{8}{5}\right).$$

Mit $\vec{a} \cdot \vec{n} = 10$, $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{n}| = 3$ gilt für den Winkel α:

$$\sin\alpha = \left|\frac{10}{27}\right| \Rightarrow \alpha \approx 21,7$$

c) Die gesuchten Punkte P_1, P_2 liegen auf g, somit gilt

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Je einer dieser Punkte liegt – bezogen auf den Ursprung – jenseits bzw. diesseits der Ebene ε. Für den ersten gilt $d = (\vec{x_1} - \vec{x_0}) \cdot e_n$.

Mit $d = 4$, $\vec{e_n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (als beliebigem Vektor, dessen Koordinaten die Gleichung für ε erfüllen) folgt

$$4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 + 7t_1 \\ 5 + 4t_1 \\ 4t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 12 = 2(8 + 7t_1) - 2(5 + 4t_1) + 4t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{3}{5}.$$

Für den zweiten Punkt gilt $d = (\vec{x_1} - \vec{x_0}) \cdot e_n$, also

$$4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 - 7t_2 \\ -5 - 4t_2 \\ -4t_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 12 = 2(-8 - 7t_2) - 2(-5 - 4t_2) - 4t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = -\frac{9}{5}.$$

Es ist also $P_1\left(\frac{67}{5} \,\middle|\, \frac{37}{5} \,\middle|\, \frac{32}{5}\right)$ und $P_2\left(-\frac{18}{5} \,\middle|\, -4 \,\middle|\, -5\right)$.

5 a) Mit der allgemeinen Formel $\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$ erhält man $S\left(\frac{a}{3} \,|\, \frac{a}{3} \,|\, \frac{a}{3}\right)$. 320

b) Parametergleichung:

$$\varepsilon : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Normalengleichung:

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2 = n_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $\varepsilon : x + y + z = a$.

c) Durch $\overrightarrow{SP}$ ist der Vektor $\vec{p} - \vec{s}$ bestimmt, der senkrecht auf ε steht. Daher muss $\vec{p} - \vec{s} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sein mit $r \in \mathbb{R}$ und für den Punkt P muss gelten:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p;$$

es ist also $P(p \,|\, p \,|\, p)$. Weiter gilt

$$|\vec{p} - \vec{s}| = \sqrt{3(p - \frac{a}{3})^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}a \quad \Rightarrow \quad p = a, \quad \text{also ist} \quad P(a \,|\, a \,|\, a).$$

d) $g_1 : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 54{,}7°.$

e) Es gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = |\overline{AP}| = |\overline{BP}| = |\overline{CP}| = a\sqrt{2}$. Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s hat das Volumen $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}s^3$; also ist

$$V = \tfrac{1}{12}\sqrt{2} \cdot a^3 \cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{1}{3}a^3.$$

320 **6 a)** $D(-6\,|-6\,|\,2)$

b) Fläche des Quadrats: $144\,FE$; Höhe: $h = 18\,(LE)$;

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 18 = 864$ (in VE).

c) $|\overline{AS}| = \sqrt{324 + 36 + 36} = \sqrt{396} \approx 19,9$

d) $g_{AG} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $G(-3\,|\,3\,|\,11)$; Mitte der Strecke $\overline{CS}$.

$g_{BH} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $H(-3\,|-3\,|\,11)$; Mitte der Strecke $\overline{DS}$.

$g_{CE} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $E(3\,|-3\,|\,11)$; Mitte der Strecke $\overline{AS}$.

$g_{DF} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $F(3\,|\,3\,|\,11)$; Mitte der Strecke $\overline{BS}$.

e) Schnittpunkt aller vier Geraden $P(0\,|\,0\,|\,8)$.

f) Schnittwinkel: $\beta \approx 70,529°$.

g) Geradengleichung des Sonnenstrahls durch S:

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; Schattenpunkt $T(-5\,|\,20\,|\,0)$.

h) $\beta \approx 44,132°$.

7 a) Die beiden Geraden $g_{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $d_{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind parallel, folglich liegen die vier Punkte in einer Ebene.

Da die Geraden $g_{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ebenfalls parallel sind, bilden die vier Punkte ein Parallelogramm.

Wegen $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ stehen die Seiten jedoch nicht senkrecht aufeinander, es handelt sich folglich nicht um ein Rechteck. 320

b) Parametergleichung: $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalengleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2n_1 - n_2 - n_3 = 0 \\ 2n_1 - 3n_2 + n_3 = 0 \end{cases}$$

Setzt man $n_1 = 1$, so folgt aus der ersten Gleichung $n_3 = 2 - n_2$, und damit aus der zweiten $n_3 = 1$. Es ist also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 12$ ist eine Normalengleichung der Ebene also $x + y + z = 12$.

c) Es ist $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, die Hesseform der Ebene ist also $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$.

Der Abstand der Ebene vom Ursprung beträgt also $d = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$.

d) Bei dem Viereck handelt es sich um ein Parallelogramm. Bezeichnet man die durch die Pfeile $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ bestimmten Vektoren mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, dann gilt für den Ortsvektor $\vec{s}$ des Diagonalenschnittpunktes S:

$$\vec{s} = \vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für den Abstand $d = |\vec{s}|$ erhält man $d = \sqrt{50}$.

e) Für den Ortsvektor $\vec{f}$ des Fußpunktes F gilt $\vec{f} = 4\sqrt{3} \cdot \vec{n} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Für den Abstand d erhält man

$$d = \left|\vec{s} - \vec{f}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}.$$

320 **f)** Die Gerade geht durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

8 a) $|\vec{p}_3 - \vec{p}_2| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = |\vec{p}_4 - \vec{p}_3|$

b) $\cos\alpha = \frac{1}{5} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 78{,}4°; \quad \beta = \frac{1}{2}(180° - \alpha) \approx 50{,}8°.$

c) $\vec{n}\cdot(\vec{p}_3 - \vec{p}_2) = \vec{n}\cdot(\vec{p}_4 - \vec{p}_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} -2n_1 & +n_2 & & = 0 \\ & -n_2 & +2n_3 & = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} n_2 & = 2n_1 \\ n_1 & = n_3 \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\varepsilon: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}_3 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: x + 2y + z = 6.$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) Aus den Gleichungen für g und ε ergibt sich durch Einsetzen:

$$t + 2(-2 + 2t) + t = 6 \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{5}{3}.$$

Damit erhält man $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, also $F(\frac{5}{3} \mid \frac{4}{3} \mid \frac{5}{3})$.

$$|\vec{f} - \vec{p}_1| = \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3}\sqrt{150} = \frac{5}{3}\sqrt{6}.$$

f) Hessegleichung der Ebene:

$$\varepsilon: \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \sqrt{6}.$$

Für den Abstand d gilt: 320

$$d = \left|\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_n - \sqrt{6}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\right| = \frac{10}{\sqrt{6}} = \tfrac{5}{3}\sqrt{6}.$$

9 a) $\vec{r}$ senkrecht zu $\vec{h}$; deshalb gilt für das Skalarprodukt: $\vec{r} \cdot \vec{h} = 0$, also $z = 6$. 321

b) $|\vec{r}| = 7$, $|\vec{h}| = 7$. Nach Pythagoras hat die Seitenlinie die Länge $s = 7\sqrt{2}$.

c) $V = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 49 \cdot \pi \approx 359,189$ (in VE).

d) $P(4\,|\,7\,|\,2)$ durch $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \vec{r}$; $S(5\,|\,3\,|\,11)$ durch $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \vec{h}$.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix};\ t \in [0;1]$$

10 a) $\varepsilon_{ABC} : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix};$

Normalengleichung: $\varepsilon_{ABC} : 14x + 11y + 10z = 62$.

b) $a = 2$; $P(-6\,|\,6\,|\,8)$.

c) $g_{AP} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $g_{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Schnittpunkt: $S(-6\,|\,6\,|\,8) = P$.

d) S liegt außerhalb der Strecke $\overline{BC}$; B ist die Mitte der Strecke $\overline{SC}$.

e) Lotgerade $l : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$; $Q(x\,|\,y\,|\,0)$ liegt auf der Lotgeraden, deshalb ist $t = -0,4$, $x = -5,6$, $y = -2,4$ und damit $Q(-5,6\,|-2,4\,|\,0)$.

f) Abstand $d = 8,168$.

g) Die Ebene ε ist parallel zur xy-Ebene im Abstand 4.

h) Schnittgerade $g_s : x = \begin{pmatrix} 22 \\ -26 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$; Schnittwinkel: $\beta \approx 60,679°$.

321 **11 a)** Widerspruch: $5 = 0$.

b) $\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; Koordinatengleichung $\varepsilon : 5x + 2y - 2z = 0$.

c) Abstand zum Ursprung $d = 0$.

d) Die Geraden sind nicht parallel; das Gleichungssystem liefert einen Widerspruch: $r = 0,\ s = 0,\ 5 = 3$.

e) $h_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; Abstand $d = 2$.

f) Ein Punkt auf der Geraden hat die Darstellung $P(2 - 2r \,|\, 5r \,|\, 5)$.

Die Vektoren sind $\begin{pmatrix} -2r \\ 5r + 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ergibt sich $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{6r + 15}{3\sqrt{29r^2 + 50r + 50}}$.

Daraus folgt $r = 0$ oder $r = -\frac{10}{21}$. Es gibt zwei Punkte $P_1(2 \,|\, 0 \,|\, 5)$ und $P_2\left(\frac{62}{21} \,\middle|\, -\frac{50}{21} \,\middle|\, 5\right)$.

12 a) Für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) $\sqrt{225 + t^2} = 2t + 1$ für $t = 8$ oder $t = -\frac{28}{3}$.

c) $A(1 \,|\, 2 \,|\, 3)$, $B(16 \,|\, 10 \,|\, 3)$, $C(8 \,|\, 25 \,|\, 3)$, $D(-7 \,|\, 17 \,|\, 3)$, $E(1 \,|\, 2 \,|\, 20)$, $F(16 \,|\, 10 \,|\, 20)$, $G(8 \,|\, 25 \,|\, 20)$, $H(-7 \,|\, 17 \,|\, 20)$.

d) $m\,(\sphericalangle \text{HEG}) = 45°$, $m\,(\sphericalangle \text{HAG}) = 41{,}089°$.

e) Da der Punkt P auf $\overline{AE}$ liegt, sind seine Koordinaten $P(1 \,|\, 2 \,|\, z)$; dabei ist z gesucht.

Durch $\overrightarrow{PH}$ ist der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -\ 8 \\ 15 \\ 20 - z \end{pmatrix}$ und durch $\overrightarrow{PG}$ der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ 20 - z \end{pmatrix}$ bestimmt. Mit $d = 20 - z$ ist $\cos 42{,}14° = \dfrac{\begin{pmatrix} -8 \\ 15 \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ d \end{pmatrix}}{\sqrt{64 + 225 + d^2} \cdot \sqrt{49 + 529 + d^2}}$.

Es folgt: $d = 8$ oder $d = -8$; da der Würfel oberhalb der xy-Ebene liegt, kommt nur $d = 8$ in Frage, also $P(1 \,|\, 2 \,|\, 12)$.

f) Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot 289 \cdot 17 \approx 1637{,}667$ (in VE).

13 a) Alle Geradengleichungen der Schar haben denselben Ortsvektor; damit ist bewiesen, dass alle Geraden sich in einem Punkt schneiden; Schnittpunkt $S(0\,|\,0\,|\,5)$. 322

b) $5 + r(-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$, also $x = a\ y = \sqrt{25 - a^2}$.

Das Schnittgebilde ist ein Halbkreis in der xy-Ebene mit dem Mittelpunkt $M(0\,|\,0\,|\,0)$ und dem Radius 5.

c) Ein halber Doppelkegel (wie eine halbe Sanduhr).

d) $r = 3$; $a = 4$ oder $a = -4$; $s = 2$ oder $s = -4$;

Schnittpunkte $P(12\,|\,9\,|-10)$ und $Q(-12\,|\,9\,|-10)$.

14 a) $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Die Normalenvektoren sind orthogonal, daher auch die beiden Ebenen.

b) Für $g : x_0 + t\vec{a}$ gilt $\vec{n_1} \cdot \vec{a} = \vec{n_2} \cdot \vec{a} = 0$, also $a_1 = -a_3$ und $a_2 = -2a_1$.

Setzt man $a_1 = 1$, erhält man $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Um einen Punkt auf der Schnittgeraden zu bestimmen, setzt man beispielsweise $z = 0$. Die Gleichung für ε_1 liefert dann $x = -1$ und die für ε_2 anschließend $y = -2$. Die Gleichung der Schnittgeraden g ist also:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Mit $t = -1$ folgt die Behauptung.

d) Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix} = 0$ ist $g \parallel \varepsilon(t)$

und wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix} = -t - 3$ ist $Q(-1\,|-2\,|\,0) \in \varepsilon(t)$;

damit folgt die Behauptung.

e) $\varepsilon(t_1) \perp \varepsilon(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1+1 \\ 1 \\ t_1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2+1 \\ 1 \\ t_2-1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2t_1t_2 + 3 = 0.$

322 **f)** Wegen $|\vec{n}(t)| = \sqrt{(1+t)^2 + 1 + (1-t)^2} = \sqrt{2t^2+3}$ ist die Hessegleichung

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{\sqrt{2t^2+3}}\left((t+1)x + y + (t-1)z\right) = \frac{t+3}{\sqrt{2t^2+3}}$$

mit dem Abstand $d(t) = \dfrac{|t+3|}{\sqrt{2t^2+3}}$ zum Ursprung. Es gilt:

$$d(t) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad (t+3)^2 = 6t^2 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = \tfrac{6}{5}.$$

g) Wegen $\vec{n}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ gilt der erste Teil der Behauptung.

$$r\begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r(1-t) + s &= 0 \\ r(1-t) - 2s &= 0 \\ r(2+t) - s &= 0 \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Zeilen zusammen folgt $s = 0$ und damit schließlich auch $r = 0$. Die beiden Vektoren sind also nicht kollinear.

h) $h(\vec{t}) = x_0 + r\vec{a}$, wobei $\vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{a} \cdot \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix} = 0$ gilt.

Mit $a_1 = 1$ erhält man $a_2 = \dfrac{2t}{2t-3}$ und $a_3 = \dfrac{-2t-3}{2t-3}$.

Multiplikation mit $2t-3$ ergibt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 2t \\ -2t-3 \end{pmatrix} = 0.$

i) Durch die Pfeile $\overrightarrow{PQ(t)}$, $\overrightarrow{PQ(t+1)}$ und $\overrightarrow{Q(t)Q(t+1)}$ sind die Vektoren

$\begin{pmatrix} 3-2t \\ -2t \\ 3+2t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-2t \\ -2t-2 \\ 5+2t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bestimmt.

Daher ist $\left|\overrightarrow{Q(t)Q(t+1)}\right| = \sqrt{12}$; die Seite $\overline{Q(t)Q(t+1)}$ hat also eine von t unabhängige Länge. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{PQ(t)}\right| &= \sqrt{(3-2t)^2 + 4t^2 + (3+2t)^2} = \sqrt{18+12t^2} \text{ und} \\ \left|\overrightarrow{PQ(t+1)}\right| &= \sqrt{(1-2t)^2 + (2t+2)^2 + (5+2t)^2} = \sqrt{30+24t+12t^2}. \end{aligned}$$

Aus $\left|\overrightarrow{PQ(t)}\right| = \left|\overrightarrow{PQ(t+1)}\right|$ folgt

$18 + 12t^2 = 30 + 24t + 12t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 24t + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{2}.$

322

15 a) $\varepsilon_2 : \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 5$

Eine Normalengleichung von ε_1 ist $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 1$.

Für den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Schnittgerade gilt also:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein gemeinsamer Punkt der Ebenen ε_1 und ε_2 ist beispielsweise der Punkt mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man erhält $\quad g_s : \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\varepsilon_3 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 3$.

c) $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{2}} \approx 5,34$.

Es ist $\varepsilon_4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 1$ und wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ gilt $P_1 \in \varepsilon_4$.

d) P sei ein beliebiger Punkt von g_S; es ist also $\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Koordinaten von P in die Gleichung der Ebenenschar ergibt:

$$\begin{aligned} (2-k)(-3+2t_0) + 8(2-t_0) + (4+2k)t_0 &= 10 + 3k \\ 10 &= 10. \end{aligned}$$

Die Gleichung ist unabhängig von k und t_0 lösbar, also gilt die Behauptung. Die Werte k_1 und k_2 erhält man mittels der Gleichungen

$\begin{pmatrix} 2-k \\ 8 \\ 4+2k \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2-k \\ 8 \\ 4+2k \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; Lösungen: $k_1 = -4$ und $k_2 = 0$.

322 **e)** $\begin{pmatrix} 2-k \\ 8 \\ 4+2k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{30}{7}.$

323 **16 a)** g_t und h_t schneiden sich; Schnittpunkt S(1 | t | 1).

b) Das Skalarprodukt ist jeweils null:

$(t-2)-(t+2)+4=0$ und $(1+t)(t-2)+(1-t)(t+2)+2t=0.$

c) Vektor aus b) ist Normalenvektor der Ebenenschar; Normalengleichung:

$\varepsilon : (t-2)x+(t+2)y+2z = t^2+3t.$

d) Für $t=0$ oder $t=-3$ geht die Ebene durch den Koordinatenursprung.

17 a) $B(14\,|\,9\,|\,0)$, $E(14\,|\,0\,|\,4)$, $F(14\,|\,9\,|\,4)$, $G(0\,|\,9\,|\,4)$.

b) P liegt auf der Kante $\overline{EH}$, Q liegt auf der Kante $\overline{BC}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) Die Kante $\overline{AD}$ liegt auf der Geraden g zu $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alle Punkte der Kante haben deshalb die Form S(a—0—0); daher ist

$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}.$

d) $S(10\,|\,0\,|\,0)$ oder $S(2\,|\,0\,|\,0)$, denn aus $|\overline{PQ}| = |\overline{QS}|$ folgt

$\sqrt{81+16} = \sqrt{(a-6)^2+81} \quad \Rightarrow \quad (a-6)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad a = 10 \quad \text{oder} \quad a = 2.$

e) Skalarprodukt der Richtungsvektoren: $-81+16 \neq 0$ für alle a.

f) Gleichsetzen der Terme der Geradengleichung liefert: $a = 12$, $r = 0,5$ und $t = 0,5$; damit schneidet h die Geraden $g_{12} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Schnittpunkt: $T(6\,|\,4,5\,|\,2)$; Schnittwinkel: $\beta = 64,84°$.

18 a) Aus $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=0$ folgt $b_3c_2-4b_3-4c_2+3c_3+4=0$.
Ist beispielsweise $c_2 = \frac{5}{2}$, so gilt $b_3 = 2c_3-4$ mit $c_3 \in \mathbb{R}$.

323

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\b_3\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad b_3=-2$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0 \quad\wedge\quad \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad c_2+c_3=-1 \quad\wedge\quad c_2-2c_3=-4 \quad\Leftrightarrow\quad c_2=-2 \quad\wedge\quad c_3=1$$

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2n_1+n_2-2n_3=0\\2n_1-2n_2+n_3=0\end{cases}$

Durch Auflösen dieses Gleichungssystems erhält man $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\vec{a}$. Eine Normalengleichung der Ebene ist $\varepsilon: x+2y+2z=0$. Mit $\vec{e_n}=\frac{1}{3}\vec{n}$ erhält man für den Abstand

$$d=\left|(\vec{p}-\vec{0})\cdot\vec{e_n}\right|=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=3.$$

d) Die Entfernung d' der beiden Spiegelpunkte beträgt $2d=6$. Der Punkt P' liegt vom Punkt P ausgehend 6 Einheiten in Richtung von $-\vec{e_n}$, also ist

$$\vec{p'}=\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-7\end{pmatrix}$$

19 a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}11\\5\\-2\end{pmatrix}$.

b) $M(4{,}5\,|\,0{,}5\,|\,3)$.

c) $A(3\,|-2\,|\,1)$ mit $x=3$; $B(3\,|\,3\,|\,1)$ mit $y=3$; $C(6\,|-2\,|\,5)$ mit $z=5$.

d) Die Geraden g und $g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ sind windschief.

Die Lotfußpunkte sind $F_1(3{,}4\,|\,0\,|\,3{,}2)$ und $F_2(3\,|\,0\,|\,1)$, der Abstand beträgt $d=2{,}236$.

324

20 a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -4 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(-4) \perp g.$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4-k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4-k \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 56 - 4k_1 - k(4-k_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{56-4k_1}{4-k_1}.$$

Diese Gleichung ist für alle Werte $k_1 \neq 4$ definiert. Folglich ist die Ebene $\varepsilon(4)$ zu keiner anderen Ebene der Schar $\varepsilon(k)$ senkrecht.

b) $\varepsilon^* : \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 66 - 6 = -70.$

Wegen $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49} = 7$ haben die Ebenen die Hessegleichungen

$$\varepsilon^* : \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 10 \quad \text{und} \quad \varepsilon(7) : \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2.$$

ε^* und $\varepsilon(7)$ haben demnach den Abstand $d = 10 - 2 = 8$.

21 a) $\varepsilon_2 : \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \varepsilon_2 : \begin{pmatrix} 60 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 288.$

b) $d = \left| \frac{28}{|\vec{n}_1|} - \vec{q} \cdot \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} \right| = 7.$

$$\vec{q}\,' = \vec{q} - 2 \cdot 7 \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot 7}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q'(1\,|\,3\,|-3).$$

c) Für den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden gilt:

$$\vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -291 \\ -102 \end{pmatrix}$$

$S(4\,|-8\,|\,0)$ ist gemeinsamer Punkt von ε_1 und ε_2, also gilt für die Schnittgerade

$$g_S : \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -291 \\ -102 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 7 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -291 \\ -102 \end{pmatrix}$ 324

besitzt die Lösung $s = 0,3$ und $t = -5,1$.

Der Schnittpunkt von g und g_S ist also $R(7\,|-95,3\,|-30,6)$.

d) Für zwei Parameter k_1, k_2 mit $k_1 \neq k_2$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ k_1 + 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ k_2 + 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad s = 0.$$

Die allen Ebenen gemeinsamen Gerade ist also $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichung von ε_3 ergibt

$$28r - 6(-2 - 3r) + 23(4 - 2r) = 104.$$

Die Gleichung ist für alle $r \in \mathbb{R}$ lösbar, also ist $g_2 \subset \varepsilon_3$.

$$\varepsilon_3 : \begin{pmatrix} 2k + 7 \\ -6 \\ 2k + 16 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 8k + 76 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(3,5) = \varepsilon_3$$

22 a) Die Schnittgerade der Ebenen ε_1 und ε_2 ist

$$g_S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung für $\varepsilon(k)$ ein, so erhält man

$$t(1 - k) = 4(1 - k).$$

Diese Gleichung hat für $k \neq 1$ genau eine Lösung; $S(4\,|\,4\,|\,0)$ ist dann der Schnittpunkt, er liegt in der xy-Ebene. Für $k = 1$ gilt: $g_S \subset \varepsilon_1$.

b) Für $k = 1$ sind die Ebenen ε_1 und $\varepsilon(1)$ identisch, die Schnittgerade ist g_S.

324 **c)** Für die Projektionsgeraden gilt:

	yz-Ebene:	xz-Ebene:	xy-Ebene:
Parametergleichung	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;	$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Normalenvektor	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Normalengleichung	$y + z = 4$;	$x + z = 4$;	$x - y = 0$.

23 a) Die gemeinsame Schnittgerade liegt in der Ebene $z = 0$ und erfüllt die Gleichung $x - 2y = 0$. Der Normalenvektor der Geraden ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folglich der Richtungsvektor. Da alle Ebenen der Schar den Ursprung enthalten, gilt:

$$g_S : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) $\varepsilon^*(k) : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -3 - k$ mit $\varepsilon^*(-3) = \varepsilon(-3)$.

c) k beeinflusst nur die z-Komponente von $\vec{n}$; $\varepsilon(k)$ dreht sich um g_S.

$$\vec{n} \perp \vec{n}^* \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k' \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k' = -\frac{5}{k} \text{ für } k \neq 0.$$

Zur Ebene $\varepsilon(0)$ gibt es keine Ebene der Schar, die auf $\varepsilon(0)$ senkrecht steht.

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad k' = -5; \qquad \varepsilon(-5) : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0.$$

$$g^*_{xy} : x - 2y = 0; \qquad g^*_{xz} : x - 5z = 0; \qquad g^*_{yz} : 2y + 5z = 0.$$

d) $\begin{cases} x - 2y + kz = 0 & \downarrow \cdot(-1) \\ x - 2y + (k-1)z = 0 & \downarrow \cdot(-1) \\ x - 2y - 2kz = k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) & \end{cases}$ 324

$$\Rightarrow \begin{cases} (k-1)z - kz = 0 \\ (1-3k)z = (k+1)(k-3) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 0 = (k+1)(k-3) \end{cases}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann erfüllbar, wenn $k = -1$ oder $k = 3$ ist.

Die Lösungsmenge ist dann $g_S : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Die ersten beiden Gleichungen stellen Ebenen der Schar $\varepsilon(k)$ dar und schneiden sich in $g_S : x - 2y = 0$. Die dritte Gleichung stellt eine zu $\varepsilon(-2k)$ parallele Ebene mit dem Abstand $\frac{1}{\sqrt{5+4k^2}} \cdot \left|k^2 - 2k - 3\right|$ von dieser dar und ist für $k = -1$ oder $k = 3$ identisch mit den Ebenen $\varepsilon(-1)$ bzw. $\varepsilon(3)$. In diesem Fall haben die drei Ebenen eine gemeinsame Schnittgerade.

Für andere Werte von k schneidet die dritte Ebene nicht die Schnittgerade g_S der beiden anderen Ebenen. Das Gleichungssystem ist dann nicht erfüllbar.

24 a) Falls $p = 3$ oder $p = 1$, sind die Vektoren linear abhängig, falls $p \in \mathbb{R} \setminus [1,3]$, sind die Vektoren nicht kollinear. 325

b) $A(1\,|\,4\,|\,2)$, $B(1\,|\,1\,|-2)$, $C(0\,|\,2\,|\,3)$.

Ebene: $\varepsilon_{ABC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normalengleichung: $\varepsilon_{ABC} : 11x - 4y + 3z = 1$. $D \notin \varepsilon_{ABC}$, denn $-44 - 16 - 12 \neq 1$.

c) Lotgerade: $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; Durchstoßpunkt: $D(1,5\,|\,2\,|-2,5)$.

d) Spiegelpunkt: $D'(7\,|\,0\,|-1)$.

e) Schnittgerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von g mit g_{AB} ist $P(1\,|\,2,5\,|\,0)$; Parameter $s = 0,5$.

Schnittpunkt von g mit g_{BC} ist $Q(0,6\,|\,1,4\,|\,0)$; Parameter $s = \frac{3}{5}$.

Für $0,5 < s < 0,6$ liegen die Punkte der Schnittgeraden innerhalb des Dreiecks ABC.

325 **f)** Durch $\overrightarrow{AC}$ ist ein Vektor $\vec{b}$ und durch $\overrightarrow{AB}$ ist ein Vektor $\vec{c}$ gegeben. $\overrightarrow{AP_1}$ ist dann ein Pfeil des Vektors $\frac{1}{2}\vec{c}$ und $\overrightarrow{AP_2}$ ein Pfeil des Vektors $\frac{1}{3}\vec{b}$; ferner ist $\overrightarrow{P_1C}$ ein Pfeil des Vektors $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\overrightarrow{P_2B}$ ein Pfeil des Vektors $\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$ (Bild 22/1).

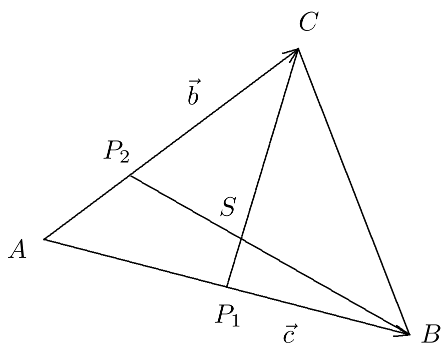

Bild 22/1

Es sei S der Schnittpunkt der Transversalen, dann gilt im Teildreieck P_2SC:

$$\begin{aligned} & s(\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{c}) + t(\vec{c} - \tfrac{1}{3}\vec{b}) &=& \tfrac{2}{3}\vec{b} \\ \Rightarrow\quad & s(\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{c}) + t(\vec{c} - \tfrac{1}{3}\vec{b}) &=& \vec{0} \\ \Rightarrow\quad & (s - \tfrac{1}{3}t - \tfrac{2}{3})\vec{b} + (t - \tfrac{1}{2}s)\vec{c} &=& \vec{0} \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht kollinear sind muss gelten:

$$s - \tfrac{1}{3}t - \tfrac{2}{3} = 0 \text{ und } t - \tfrac{1}{2}s = 0.$$

Lösung des Gleichungssystems: $s = \frac{4}{5}$ und $t = \frac{2}{5}$; daher teilt der Punkt S die Transversale $\overline{CP_1}$ im Verhältnis 4 : 1 und die Transversale $\overline{BP_2}$ im Verhältnis 3 : 2.

g) $P_1(1\,|\,2,5\,|\,0)$ und $P_2(\frac{2}{3}\,|\,\frac{10}{3}\,|\,\frac{7}{3})$.

Durch $\overrightarrow{P_1C}$ ist der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ bestimmt; Winkel mit Seite $\overline{AB}$: $\alpha \approx 49,01°$.

Durch $\overrightarrow{P_2B}$ bestimmt; Winkel mit Seite $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$; Winkel mit Seite $\overline{AC}$: $\alpha \approx 90°$.

25 a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 12 & 3 & 3k & 3k-9 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 2k & -2 & 6 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-3)\quad \cdot 2 \\ \quad\quad\;\; \cdot 1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -9 & 0 & 3k-3 & 3k-9 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 2k+14 & 0 & 8 & 16 \end{array}\right)$

Aus der letzten Zeile folgt $z = 2 - \dfrac{k+7}{4}x$. Das liefert mit der ersten Zeile

$$\begin{aligned} -36x + (8 - (k+7)x)(3k-3) &= 12k - 36 \\ (k^2 + 6k + 5)x &= 4k - 4 \\ x(k+5)(k+1) &= 4(k+1). \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat also für $k \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\}$ genau eine Lösung.

b) Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\}$ gilt: 325

$$x = \frac{4}{k+5}, \qquad z = \frac{k+3}{k+5}, \qquad y = -7\frac{4}{k+5} - \frac{k+3}{k+5} = -\frac{k+31}{k+5}.$$

Außerdem gilt: $x = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = 7.$

c) Für $k = -5$ besitzt das Gleichungssystem **keine** Lösung.

$$s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad s = \tfrac{13}{2};\ t = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{13}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{c} = \vec{a}$$

d) Für $k = -1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Lösungsmenge lässt sich in diesem Fall als Schnittgerade dreier Ebenen deuten.

26 a) Abstand $|\overline{QP}| = \frac{1}{9}\sqrt{144} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad Q(\frac{10}{9} \mid \frac{26}{9} \mid \frac{22}{9})$ **b)** $P'(\frac{2}{9} \mid \frac{34}{9} \mid \frac{26}{9})$

27 a) Schnittgerade der beiden ersten Ebenen ist $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

Schnitt von g mit der dritten Ebene ergibt $S(4 \mid 3 \mid 2)$.

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Die Textaufgabe ergibt das obige Gleichungssystem mit x als Einerziffer, y als Zehnerziffer und z als Hunderterziffer.

28 a) Abstand $|\overline{Q,P}| = \sqrt{30} \approx 5,48 \quad \Rightarrow \quad Q(7 \mid -9 \mid 1)$ 326

b) $P'(12 \mid -7 \mid 2)$

c) Q ist ein Punkt der Geraden g, also $Q(5 + 2r \mid -4 - 5r \mid 1)$.

Der Abstand $|\overline{Q,P}|$ soll minimal werden, deshalb müssen die Extremstellen der Funktion zu $d(r) = \sqrt{29r^2 - 58r + 59}$ betrachtet werden.

Notwendige Bedingung $d'(r) = 0, \quad d'(r) = \dfrac{58r - 58}{2\sqrt{29r^2 - 58r + 59}}$.

Mit dem Minimum für $r = 1$ ergeben sich die Werte von a).

326 **29 a)** $g_P : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g_Q : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Die Geraden sind windschief zueinander.

c) $P_0(0\,|\,1\,|\,1)$, $P_1(1\,|\,1\,|\,0)$, Länge der Strecke $|\overline{P_0P_1}| = \sqrt{2}$;

$Q_0(0\,|\,0\,|\,0)$, $Q_1(1\,|\,0\,|\,1)$, Länge der Strecke $|\overline{Q_0Q_1}| = \sqrt{2}$.

d) $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-2a \end{pmatrix}$

e) $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-2k \end{pmatrix}$ und $g_l : \vec{x} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ l \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-2l \end{pmatrix}$ mit $k \neq l$.

Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} k \qquad\qquad &= l \\ r \quad &= \quad s \\ k + r(1-2k) &= l + s(1-2l) \end{aligned}$$

Da vorausgesetzt wird, dass $k \neq l$ ist, ergibt sich durch die erste Gleichung des Gleichungssystems ein Widerspruch; die Geraden schneiden sich also nicht. Da die Geraden für $k \neq l$ auch nicht parallel sind, ist damit gezeigt, dass die Geraden windschief zueinander sind.

f) Ermittlung der parameterfreien Darstellung der Geradenschar g_a ergibt:

$x = a$, $y = r$ und $z = a + r(1-2a) \quad \Rightarrow \quad z = x + y - 2xy$ (Bild 24/1).

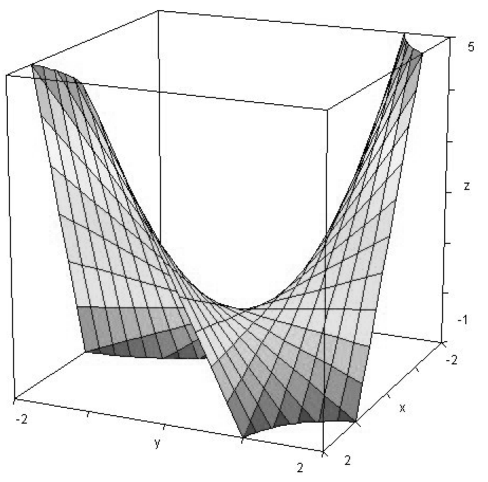

Bild 24/1: Grafische Darstellung der Sattelfläche

7.2 Abbildungen und Prozesse

30 a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ 326

b) $M(1\,|\,2)$ Fixpunkt

c) Charakteristische Gleichung $k^2 - 5k + 6 = 0$

Eigenwerte	$k = 3$	$k = 2$
Eigenvektoren	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Gerade g:
Für $r = 0$ erhält man $M(1\,|\,2)$; Fixpunkt.
Für $r = 1$ erhält man $Q(1\,|\,3)$, Bildpunkt $Q'(1\,|\,5)$ ist auch Punkt der Geraden g.

Gerade h:
Für $r = 0$ erhält man $M(1\,|\,2)$; Fixpunkt.
Für $r = 1$ erhält man $P(2\,|\,3)$, Bildpunkt $P'(3\,|\,4)$ ist auch Punkt der Geraden h.
Die Abbildung ist eine Eulersche Affinität mit Zentrum Z.

31 a) Aus dem Ansatz $x' = ax + by + e \wedge y' = cx + dy + f$ ergeben sich durch Einsetzen der Punktkoordinaten die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{cases} -3a + 2b + e = 1 \\ a + b + e = -3 \\ -4a + 2b + e = -4 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -3c + 2d + f = 1 \\ c + d + f = 2 \\ -4c + 2d + f = 2 \end{cases}$$

mit den Lösungen $a = 5$, $b = 24$, $c = -1$, $d = -5$, $e = -32$ und $f = 8$; daher ist

$$f : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -32 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b) $\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$;

$$\vec{m}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \vec{m}$$

c) Es ist $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für einen beliebigen Punkt $P \in g$ gilt

$$\vec{p}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 & 24 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

326 Der Stützvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gehört zu einem Punkt auf g und da $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist, liegt auch P' auf g; die Gerade g ist also eine Fixgerade.

d) Es ist $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für einen beliebigen Punkt $P \in h$ gilt

$$\vec{p}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 24 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 & 24 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{p}.$$

Es ist also $P' = P$; die Gerade h ist eine Fixpunktgerade.

e) Die Eigenwerte sind $k_1 = 1$; $k_2 = -1$, die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{x}_1 = c\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = c\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

f) Die Fixgerade in Richtung $\vec{x}_1$ hat die Gleichung $x + 6y = 8$ und ist identisch mit der Geraden h aus Aufgabenteil d); es handelt sich also um eine Fixpunktgerade.

Die Fixgeraden in Richtung $\vec{x}_2$ haben Gleichungen der Form $x + 4y = c$. Bei der Abbildung f handelt es sich also um eine Achsenspiegelung.

g) Zunächst gilt

$$\vec{a}\,' = A\vec{a} + \vec{v} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad A\vec{a} = \vec{b} - \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{b}\,' = A\vec{b} + \vec{v} = \vec{a} \quad \Rightarrow \quad A\vec{b} = \vec{a} - \vec{v}.$$

Daraus folgt mit $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$$\vec{m}\,' = \tfrac{1}{2}A(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{v} = \tfrac{1}{2}(A\vec{a} + A\vec{b}) + \vec{v} = \tfrac{1}{2}\Big((\vec{b} - \vec{v}) + (\vec{a} - \vec{v})\Big) + \vec{v} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

Es ist also $\vec{m}\,' = \vec{m}$; der Punkt M ist ein Fixpunkt.

h) Es ist $g: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$. Für einen beliebigen Punkt $P \in g$ gilt:

$$\vec{p}\,' = A\vec{a} + tA\vec{b} - tA\vec{a} + \vec{v} = \vec{b} + t(\vec{a} - \vec{b}).$$

Da B auf g liegt, liegt auch $\vec{p}\,'$ auf g; also ist g eine Fixgerade von f.

i) Es ist $h: \vec{x} = \vec{f} + t(\vec{m} - \vec{f})$. Für einen beliebigen Punkt $P \in g$ gilt wegen $A\vec{m} + \vec{v} = \vec{m}$ und $A\vec{f} + \vec{v} = \vec{f}$

$$\begin{aligned} \vec{p}\,' &= (A\vec{f} + \vec{v}) + tA\vec{m} - tA\vec{f} = \vec{f} + t(\vec{m} - \vec{v}) - t(\vec{f} - \vec{v}) \\ &= \vec{f} + t(\vec{m} - \vec{f}) = \vec{p}, \end{aligned}$$

also ist jeder Punkt von h Fixpunkt der Abbildung f.

j) Gehören zu A, B, F, M die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{f}$, $\vec{m}$, dann ist $\vec{m}-\vec{f}$ Richtungsvektor der Fixpunktgeraden von f und $\vec{b}-\vec{a}$ Richtungsvektor der Fixgeraden von f. Daher sind $\vec{m}-\vec{f}$ und $\vec{b}-\vec{a}$ Eigenvektoren von f. Für die Eigenwerte k gilt $A\vec{x} = k\vec{x}$, also 326

$$\begin{aligned}
& A(\vec{m}-\vec{f}) = k_1(\vec{m}-\vec{f}) \\
\Rightarrow\quad & A(\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{f}) = k_1(\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{f}) \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{v}) + \tfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{v}) - \vec{f} + \vec{v} = k_1(\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{f}) \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{f} = k_1(\tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{f}) \\
\Rightarrow\quad & k_1 = 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& A(\vec{b}-\vec{a}) = k_2(\vec{b}-\vec{a}) \\
\Rightarrow\quad & A\vec{b}-A\vec{a} = k_2(\vec{b}-\vec{a}) \\
\Rightarrow\quad & (\vec{a}-\vec{v}) - (\vec{b}-\vec{v}) = k_2(\vec{b}-\vec{a}) \\
\Rightarrow\quad & \vec{a}-\vec{b} = k_2(\vec{b}-\vec{a}) \\
\Rightarrow\quad & k_2 = -1.
\end{aligned}$$

k) Achsenspiegelung.

32 a) $\vec{f}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; 327

$\vec{g}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$;

b) Alle Fixpunkte liegen auf der Geraden zu $2x + y = 1$.

c) Es handelt sich um eine Scherung.

d) Eine affine Abbildung bildet Geraden auf Geraden ab. Da G und F Fixpunkte sind, wird die Gerade durch G und F auf sich selbst abgebildet.

e) $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ mit den Fixpunkten $P_1(x_1\,|\,y_1)$, $P_2(x_2\,|\,y_2)$ und $P_3(x_3\,|\,y_3)$ gibt, so gilt

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + e &= x_1 \\ ax_2 + by_2 + e &= x_2 \\ ax_3 + by_3 + e &= x_3 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} cx_1 + dy_1 + f &= y_1 \\ cx_2 + dy_2 + f &= y_2 \\ cx_3 + dy_3 + f &= y_3, \end{aligned}$$

das heißt

$$\begin{aligned} (a-1)x_1 + by_1 + e &= 0 \\ (a-1)x_2 + by_2 + e &= 0 \\ (a-1)x_3 + by_3 + e &= 0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} cx_1 + (d-1)y_1 + f &= 0 \\ cx_2 + (d-1)y_2 + f &= 0 \\ cx_3 + (d-1)y_3 + f &= 0. \end{aligned}$$

327 Man erhält also zwei homogene Gleichungssysteme mit je drei Gleichungen und drei Unbekannten. Da die Punkte P_1, P_2 und P_3 nach Voraussetzung nicht kollinear sind, sind die Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ e \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ e \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ e \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ f \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ f \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ f \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die beiden Gleichungssysteme besitzen daher nur eine, die triviale Lösung. Es gilt also $a-1 = b = c = d-1 = e = f = 0$. Die einzige Abbildung mit der gesuchten Eigenschaft ist also die identische Abbildung zu $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$.

Dass die identische Abbildung die gesuchte Eigenschaft besitzt, ist auch unmittelbar klar, die Lösung zeigt allerdings zusätzlich, dass es die einzige affine Abbildung mit dieser Eigenschaft ist.

33 a) Mit $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ erhält man $\vec{s} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} e &= 1 \\ a + 3b + e &= -4 \\ -4a + 2b + e &= 0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} f &= 3 \\ c + 3d + f &= 2 \\ -4c + 2d + f &= 0 \end{aligned}$$

haben die Lösungen $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$, $e = 1$ und $f = 3$. Die gesuchte Abbildungsgleichung ist daher

$$f : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist $|A| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; daher ist f flächentreu.

Ferner ist $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

die Abbildung ist daher nicht längentreu.

Ein anderer Weg zur Überprüfung der Längentreue:

$$|A\vec{x}|^2 = (-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y)^2 + (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y)^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + xy + \tfrac{5}{2}y^2 \neq x^2 + y^2 = |\vec{x}|^2.$$

d) $\vec{s}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{s} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \vec{s}$

e) Ist M mit dem Ortsvektor $\vec{m}$ Mittelpunkt von $\overline{BC}$, dann gilt $\vec{s} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{a})$ und $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. Daher gilt $\vec{s} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

f) Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \vec{a}\,' = \vec{b} \quad &\Rightarrow \quad A\vec{a} = \vec{b} - \vec{v};\\ \vec{b}\,' = \vec{c} \quad &\Rightarrow \quad A\vec{b} = \vec{c} - \vec{v};\\ \vec{c}\,' = \vec{a} \quad &\Rightarrow \quad A\vec{c} = \vec{a} - \vec{v}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \vec{s}\,' &= \tfrac{1}{3}A(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) + \vec{v} = \tfrac{1}{3}(A\vec{a}+A\vec{b}+A\vec{c}) + \vec{v}\\ &= \tfrac{1}{3}(\vec{b}-\vec{v}+\vec{c}-\vec{v}+\vec{a}-\vec{v}) + \vec{v} = \tfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{s}. \end{aligned}$$

34 a) Zu f_1:

Fixpunkt ist $F_1(\frac{1}{5}\,|-\frac{31}{40})$. Die charakteristische Gleichung ist $(7-e)(9-e)-8=0$, sie hat die Lösungen $e_1 = 5$, $e_2 = 11$.

Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = c\begin{pmatrix} 4\\ -1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = c\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear.

Bei der Abbildung f_1 handelt es sich also um eine Euler-Affinität.

zu f_{-1}:

Fixpunkt ist $F_{-1}(\frac{1}{7}\,|-\frac{41}{56})$. Die charakteristische Gleichung $(7-e)(9-e)+8=0$ hat keine Lösung, folglich existieren keine Eigenwerte.

Die Abbildung f_{-1} ist demnach eine affine Drehstreckung.

b) $\begin{pmatrix} 6 & 8\\ k & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5\\ 6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{6-k} \quad$ und $\quad y = \dfrac{5k-36}{8(6-k)}$.

Der Fixpunkt ist $F_k\left(\dfrac{1}{6-k}\,\middle|\,\dfrac{5k-36}{8(6-k)}\right)$.

c) Für $k=6$ existiert kein Fixpunkt. Die Eigenwerte sind in diesem Fall $e_1 = 1$ und $e_2 = 15$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = c\begin{pmatrix} 4\\ -3\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = c\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3\\ 4\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zu $\vec{x}_1$, die Fixgerade hat daher die Form $3x+4y=c$.

Der Punkt $P(\frac{c}{3}\,|\,0)$ liegt auf dieser Geraden, er wird durch die Abbildung f_6 auf den Punkt $P'(\frac{7}{3}c+5\,|\,2c+6)$ abgebildet.

Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichung $3x+4y=c$ liefert

$$3\left(\tfrac{7}{3}c+5\right) + 4(2c+6) = c \quad \Rightarrow \quad c = -\tfrac{39}{14}.$$

Die Fixgerade hat also die Gleichung $42x+56y=-39$.

Bei der Abbildung f_6 handelt es sich insgesamt um eine Schubparallelstreckung.

327 **35 a)** Die charakteristische Gleichung ist $e^2 - (1+k)e + 9 = 0$ mit der Diskriminante

$$D = k^2 - 2k - 35 = (k-7)(k+5).$$

Für $k \in \,]-5; 7[\,$ ist $D < 0$, in diesem Fall existieren keine Eigenwerte.

Für $k = 7$ oder $k = -5$ ist $D = 0$ und es existiert genau ein Eigenwert.

Schließlich ist $D > 0$ für $k < -5$ und $k > 7$, in diesem Fall existieren zwei Eigenwerte.

b) Es gilt $(1-e)(11-e) + 9 = (e-10)(e-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1 = 2;\ e_2 = 10.$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{x}_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Mit $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man die Normaldarstellung
$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Es handelt sich bei der Abbildung f_{11} also um eine Euler-Affinität.

d) Die Abbildung $g_1 = f_1 \circ f_1$ besitzt die Matrix $A_1 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

Der Ursprung ist der einzige Fixpunkt dieser Abbildung.

Die charakteristische Gleichung ist $(-8-e)^2 + 36 = 0$ mit der Diskriminante
$D = 16^2 - 4 \cdot 100 < 0$; daher existieren keine Eigenwerte.

Es handelt sich demnach um eine affine Drehstreckung mit $k = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ und mit $\cos\varphi = -\frac{8}{10}$, also $\varphi \approx 143,1$.

Die Abbildung $g_{-1} = f_{-1} \circ f_{-1}$ besitzt die Matrix $A_{-1} \cdot A_{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Es handelt sich daher um eine zentrische Streckung mit dem Faktor $k = -8$.

Jeder Vektor ist Eigenvektor zum Eigenwert $e = -8$; einziger Fixpunkt ist der Ursprung, und jede Gerade durch den Ursprung ist eine Fixgerade.

36 a) Die Diskriminante der charakteristischen Gleichung $e^2 - ke + 1 = 0$ ist $D = k^2 - 4$.

Für $|k| < 2$ ist $D < 0$, in diesem Fall existiert kein Eigenwert. Der einzige Fixpunkt der Abbildung ist $F(\frac{2}{2-k} \mid \frac{2}{k-2})$.

Für $|k| < 2$ liegt folglich eine Drehstreckung vor.

b) Es ist $D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \vee k = -2$.

Im Fall $k = 2$ ist $e = 1$ einziger Eigenwert mit dem Eigenvektor $\vec{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wählt man $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, also $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 327

Für $k = 2$ handelt es sich also um eine Schubscherung.

Für $k = -2$ ist $e = -1$ einziger Eigenwert mit dem Eigenvektor $\vec{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wählt man $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Der einzige Fixpunkt der Abbildung ist $F\left(\frac{1}{2} \,|\, -\frac{1}{2}\right)$. Die Fixgerade geht durch den Fixpunkt und verläuft in Richtung des Eigenvektors; ihre Gleichung ist daher $y = x - 1$.

Für $k = -2$ handelt es sich also um eine Scherstreckung.

c) $f_k^{-1} : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) $f_0^{-1} : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\qquad f_0^2 : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$f_0^3 : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = f_0^{-1}(\vec{x})$.

Es ist $f^4 = \mathrm{id}$ und $f_0 \circ f_0^3 = f^4$, also ist $f_0 \circ f_0^3 = \mathrm{id} \quad \Rightarrow \quad f_0^{-1} = f_0^3$.

37 a) Die charakteristische Gleichung ist $e^2 - (3+r)e + 3r + 2 = 0$ mit der Diskriminante $D = r^2 - 6r + 1$. 328

Es ist $D < 0$ für $3 - \sqrt{8} < r < 3 + \sqrt{8}$, also für $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, $r = 4$ und $r = 5$.

b) Der Fixpunkt der Abbildung f_6 ist $F\left(\frac{1}{3} \,|\, -\frac{1}{3}\right)$.

Die Koordinatentransformation $\vec{x}^* = \vec{x} - \vec{x}_F$ führt zu der linearen Abbildung

$$L_6 : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

c) Die Eigenwerte sind $e_1 = 4$ und $e_2 = 5$; $\vec{x}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die zugehörigen Eigenvektoren. Aus den Eigenwerten ergibt sich

$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, also $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und damit $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Diese Matrix beschreibt eine Euler-Affinität.

328 **d)** $h = f_r \circ g_s : \vec{x}\,' = (A_r \cdot B_s) \cdot \vec{x} + A_r \cdot \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = H \cdot \vec{x} + A_r \cdot \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

h ist genau dann linear, wenn gilt:

$$\begin{aligned} A_r \cdot \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs+3 \\ -\ s+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad s = 7 \quad \text{und} \quad r = -\tfrac{3}{7}, \\ &\Rightarrow \quad H = \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 7 & -21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) $k = g_4 \circ f_0 : \vec{x}\,' = (B_4 \cdot A_0) \cdot \vec{x} + B_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Alle Fixpunkte liegen auf der Geraden zu $2x - 5y = 1$.

$k_1 = 1$ und $k_2 = -2$ sind die Eigenwerte, $\vec{x}_1 = c \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die zugehörigen Eigenvektoren. Alle Fixgeraden haben Gleichungen der Form $y = x + c$.

Es handelt sich bei der Abbildung um eine Parallelstreckung.

38 a) Die Gerade h durch den Punkt $P(x\,|\,y)$, die auf der Geraden g senkrecht steht, hat die Gleichung $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; ferner ist $g : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Für den Schnittpunkt S von g und h gilt:

$$\left.\begin{aligned} & x + 2s = t \\ \wedge \quad & y - \ \ s = 2t \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{1}{5}(x + 2y) \quad \text{und} \quad s = \tfrac{1}{5}(-2x + y).$$

Hieraus erhält man:

$$\vec{s} = \tfrac{1}{5}(x + 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{x}\,'.$$

b) $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; wegen $|A| = 0$ ist die Abbildung singulär und daher nicht umkehrbar. Dies ist auch unmittelbar klar, da die gesamte Ebene auf die Gerade g abgebildet wird.

c) Da die Abbildung durch eine Matrix beschrieben werden kann, ist sie linear.

d) Ist g die Gerade zu $\vec{x} = t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, dann ist h die Gerade zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix}$. 328

Für den Schnittpunkt S von g und h gilt dann:

$$\left.\begin{array}{rrcl} & ut + vs &=& tx \\ \wedge & vt - us &=& ty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{ux+vy}{u^2+v^2} \quad \text{und} \quad s = \frac{-vx+uy}{u^2+v^2}.$$

Es folgt

$$\vec{s} = \frac{ux+vy}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{s}\,'.$$

e) Jeder Punkt der Ebene wird durch die Projektion auf denselben Punkt der Projektionsgeraden abgebildet wie sein Spiegelpunkt.

Ferner gilt $|\vec{x}| = |s_g(\vec{x})|$ und $|p_g(\vec{x})| = |p_g(s_g(\vec{x}))|$.

Da g den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $s_g(\vec{x})$ halbiert, ergibt sich die Behauptung.

f) Aus d) und e) ergibt sich

$$\begin{aligned} s_g(\vec{x}) &= 2p_g(\vec{x}) - \vec{x} = \frac{2}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} \\ &= \frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u^2-v^2 & 2uv \\ 2uv & v^2-u^2 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\vec{x}. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$a = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, \qquad b = \frac{2uv}{u^2+v^2} \quad \text{und} \quad a^2+b^2 = \frac{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}{(u^2+v^2)^2} = 1.$$

39 a) Da der Ursprung Fixpunkt ist, handelt es sich um eine lineare Abbildung, die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dargestellt wird. Die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} a - 2b &=& 1 \\ a - b &=& 1-k \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} c - 2d &=& -2 \\ c - d &=& 2k-1 \end{array}$$

haben die Lösungen $a = 1-2k$, $b = -k$, $c = 4k$ und $d = 1+2k$; die Affinität hat also die Abbildungsgleichung $f_h : \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1-2k & -k \\ 4k & 1+2k \end{pmatrix}\vec{x}$.

328 **b)** Die charakteristische Gleichung ist:

$$(1-2k-e)(1+2k-e)+4k^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (1-e)^2-(2k)^2+4k^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad e=1.$$

Zu $e=1$ gehört der Eigenvektor $\vec{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Die in Richtung von $\vec{x}$ verlaufenden Fixgeraden haben Gleichungen der Form $2x+y=c$. Ferner ist $y=-2x$ eine Fixpunktgerade von f.

c) Für $k\neq 0$ liegt eine Scherung vor.

d) Sei beispielsweise $T=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$, dann ist $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, und man erhält $B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&-k\\0&1\end{pmatrix}$.

e) $A_kA_i=\begin{pmatrix}1-2(k+i)&-(k+i)\\4(k+i)&2(k+i)+1\end{pmatrix}=A_{k+i}$. Das neutrale Element f_0 ist die identische Abbildung. Ferner gilt:

$$(A_k)^{-1}=\begin{pmatrix}1+2k&h\\-4k&1-2k\end{pmatrix}=f_{-k}.$$

Wegen $A_kA_i=A_{k+i}=A_{i+k}=A_iA_k$ handelt es sich um eine kommutative Gruppe.

f) Zur Punktspiegelung g am Ursprung gehört die Gleichung $g:\vec{x}\,'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\vec{x}$.

Man verschiebt nun zunächst das Zentrum $Z(-1\,|\,4)$ mit dem Vektor $-\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ in den Ursprung, führt die Punktspiegelung am Ursprung durch und macht schließlich mit dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ die Verschiebung wieder rückgängig:

$$\vec{x}\to\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)\to\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$

Die Abbildungsgleichung für die Punktspiegelung am Zentrum $Z(-1\,|\,4)$ ist also

$$h:\vec{x}\,'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}.$$

g) $h\circ f_1:\vec{x}\,'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-1&-1\\4&3\end{pmatrix}\vec{x}\right)+\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-4&-3\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}.$

Fixpunkt der Abbildung ist $F(0\,|-2)$; der einzige Eigenwert ist $e = -1$ mit dem Eigenvektor $\vec{x} = c\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich die Fixgerade $2x + y = 2$. 328

Es handelt sich um eine Scherstreckung.

40 **1. Fall:** $a \neq 1$.

a) Alle Punkte auf der Geraden zu $x = 0$ sind Fixpunkte der Abbildung.

b) $e_1 = 1$; $e_2 = a$; $\vec{x}_1 = c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = c\begin{pmatrix}a-1\\b\end{pmatrix}$

c) Die Fixgeraden in Richtung von $\vec{x}_2$ haben die Gleichung $bx + (1-a)y = c$.

d) Mit $T = \begin{pmatrix}0 & a-1\\1 & b\end{pmatrix}$, $T^{-1} = \dfrac{1}{1-a}\begin{pmatrix}b & 1-a\\-1 & 0\end{pmatrix}$ erhält man

$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & a\end{pmatrix}$. Es handelt sich dann um eine Parallelstreckung.

2. Fall: $a = 1,\ b \neq 0$

a) Die Gerade zu $x = 0$ ist Fixpunktgerade.

b) $e = 1$; $\vec{x} = c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

c) Alle Geraden zu $x = c$ sind Fixgeraden der Abbildung.

d) Mit $T = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ ist $T^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ und man erhält $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Folglich handelt es sich um eine Scherung.

3. Fall: $a = 1$, $b = 0$.

In diesem Fall handelt es sich um die Identität.

e) Sei $P(x_0\,|\,y_0)$ kein Fixpunkt. Dann ist $x_0 \neq 0$, weil die Gerade zu $x = 0$ Fixpunktgerade ist. Für die Koordinaten des Bildpunktes P' muss gelten $x_0' = ax_0$ und $y_0' = bx_0 + y_0$. Die Gerade g durch P und P' hat die Gleichung

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}ax_0 - x_0\\bx_0 + y_0 - y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + tx_0\begin{pmatrix}a-1\\b\end{pmatrix}.$$

Für einen Fixpunkt $F(f_1\,|\,f_2)$ auf der Geraden g gilt:

$$x_0 + tx_0(a-1) = f_1 = af_1; \quad y_0 + tx_0 b = f_2 = bf_1 + f_2.$$

Für $a \neq 1$ folgt $f_1 = 0$ sowie $x_0 + tx_0(a-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{1}{1-a}$ und damit ist

328 $f_2 = y_0 + \dfrac{b}{1-a}x_0.$

$F(0\,|\,y_0 + \frac{b}{1-a}x_0)$ ist also der Fixpunkt.

f) $P(x_0\,|\,y_0)$; $\quad F(0\,|\,y_0 + \frac{b}{1-a}x_0)$; $\quad P_0'(ax_0\,|\,bx_0 + y_0)$.

Liegt F zwischen P_0 und P_0', dann sind folgende Bedingungen erfüllt:

Bedingung für x-Koordinaten:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{1. Fall } x_0 < 0 < ax_0;\ x_0 < 0 & \Rightarrow & ax_0 > 0 & \Rightarrow & a < 0 \\ \text{2. Fall } ax_0 < 0 < x_0;\ x_0 > 0 & \Rightarrow & ax_0 < 0 & \Rightarrow & a < 0 \end{array}\right\}\ a < 0$$

Bedingung für y-Koordinaten:

$$\begin{array}{lll} \text{1. Fall } y_0 < y_0 + \frac{b}{1-a}x_0 < y_0 + bx_0 & \Rightarrow & 0 < \frac{b}{1-a}x_0 < bx_0 \\ \text{2. Fall } y_0 > y_0 + \frac{b}{1-a}x_0 > y_0 + bx_0 & \Rightarrow & 0 > \frac{b}{1-a}x_0 > bx_0 \end{array}$$

Für $a < 0$ ist $\frac{1}{1-a} < 1$. Folglich gilt:

$$\begin{array}{lll} \text{1. Fall: } \frac{b}{1-a}x_0 < bx_0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{1-a} < 1, \text{ falls } bx_0 > 0 \\ \text{2. Fall: } \frac{b}{1-a}x_0 > bx_0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{1-a} < 1, \text{ falls } bx_0 < 0 \end{array}$$

F liegt demnach zwischen P_0 und P_0', wenn $a < 0$ ist.
Weiter gilt:

$$\frac{|P_0'F|}{|P_0'P_0|} = \frac{\left|\frac{1}{1-a}bx_0\right|}{|bx_0|} = \frac{1}{1-a}.$$

Der Punkt F teilt für $a < 0$ die Strecke P_0P_0' also im Verhältnis $\frac{1}{1-a}$.

g) Mit $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2 + b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

mit $a \neq 0$, weil $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$. Folglich ist $f_1 \circ f_2 \in M$.

Das neutrale Element ist die identische Abbildung mit $a = 1$ und $b = 0$.

Jede Abbildung f mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ aus M besitzt eine inverse Abbildung $f^{-1} \in M$, gegeben durch $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha = \frac{1}{a}$ und $\beta = -\frac{b}{a}$.

Die Menge M bildet bezüglich der Verkettung also eine (nicht kommutative) Gruppe.

41 a) Das Element $a_{13} = 0,6$ gibt die Vermehrungsrate an, $a_{31} = 0$ zeigt, dass das Wachstum immer über die mittlere Größe verläuft, $a_{33} = 0,8$ in diesem Element steckt die Sterberate als Differenz zu 1, Sterberate also $0,2$. 329

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,48 & 0,48 \\ 0,06 & 0,01 & 0,36 \\ 0,48 & 0,72 & 0,64 \end{pmatrix}$

$$M^2 \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Nach zwei Jahren gibt es in dem Teich 3 mittlere und 24 ausgewachsene Forellen.

c) Neuer Forellenbestand $\vec{f_0}$ mit Besetzungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$\vec{f_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Forellenbestand $\vec{f_1}$ nach dem ersten Jahr:

$$\vec{f_1} = M\vec{f_0} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 8,4 \\ 24,3 \\ 13,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48,4 \\ 24,3 \\ 3,6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Forellenbestand $\vec{f_2}$ nach dem ersten Jahr:

$$\vec{f_2} = M\vec{f_1} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2,16 \\ 31,47 \\ 22,32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42,16 \\ 31,47 \\ 12,32 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 42 \\ 31 \\ 12 \end{pmatrix}$$

d) Es muss gelten $2\vec{f_0} = \vec{f_2} = M^2\vec{f_0} + M\vec{b} + \vec{b}$. Mit E als Einheitsmatrix gilt:

$M^2\vec{f_0} + ME\vec{b} + E^2\vec{b} = 2E\vec{f_0}$. Daraus folgt $\vec{b} = (M+E)^{-1}(2E - M^2)\vec{f_0}$.

Berechnung mit CAS:

$$(M+E)^{-1}(2E - M^2) = \begin{pmatrix} 1{,}873016 & 0{,}21164 & -0{,}89100 \\ -1{,}07618 & 1{,}693651 & 0{,}15873 \\ 0{,}21164 & -1{,}15273 & 0{,}685009 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{f_0} = \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{b} = \begin{pmatrix} 63,08 \\ -35,74 \\ 14,59 \end{pmatrix}$, also gerundet $\vec{b} \approx \begin{pmatrix} 63 \\ -36 \\ 14 \end{pmatrix}$

329 **42 a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) Kunde Albrecht:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Kunde Becker:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 105 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Alternative:

Wegen der Linearitätseigenschaften gibt es für die Berechnung der notwendigen Zwischenprodukte im Fall des Kunden Becker eine alternative Möglichkeit:

Der Bestellvektor des Kunden Becker ist genau das Fünffache des Bestellvektors des Kunden Albrecht. Deshalb ist der Zwischenproduktvektor des Kunden Becker genau das Fünffache des Zwischenproduktvektors des Kunden Albrecht.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 105 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Es werden für den Kunden Albrecht 16 Zwischenprodukte Z_1, 21 Zwischenprodukte Z_2, 7 Zwischenprodukte Z_3 und 9 Zwischenprodukte Z_4 benötigt.

Für den Kunden Becker sind es 80 Zwischenprodukte Z_1, 105 Zwischenprodukte Z_2, 35 Zwischenprodukte Z_3 und 45 Zwischenprodukte Z_4.

d) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 20 \\ 28 & 29 \\ 12 & 23 \end{pmatrix}$

Die Matrix C ordnet dem Vektor $\vec{p}$ den Vektor $\vec{r}$ zu.

e) Kunde Albrecht:

$$\begin{pmatrix} 26 & 20 \\ 28 & 29 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 142 \\ 82 \end{pmatrix}$$

Kunde Becker:

$$\begin{pmatrix} 26 & 20 \\ 28 & 29 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 590 \\ 710 \\ 410 \end{pmatrix}$$

Es werden für den Kunden Albrecht 118 Rohstoffe R_1, 142 Rohstoffe R_2 und 82 Rohstoffe R_3 benötigt. Für den Kunden Becker sind es 590 Rohstoffe R_1, 710 Rohstoffe R_2 und 410 Rohstoffe R_3.

7.3 Anwendungen

43 a) $U_1(12,5\,|\,0\,|-3,5)$, $U_2(12,5\,|\,9\,|-3,5)$, $U_3(12,5\,|\,15\,|-1)$, $U_4(12,5\,|\,25\,|-1)$, $U_5(0\,|\,25\,|-1)$, $U_6(0\,|\,15\,|-1)$, $U_7(0\,|\,9\,|-3,5)$, $U_8(0\,|\,0\,|-3,5)$ 330

b) Der Abstand zwischen den Punkten beträgt: $d = |\overline{RS}| = 13,928$. Zum Auftauchen benötigt Anja zusätzlich $1\,m$; insgesamt also $14,928\,m$. Sie kann es schaffen.

c) Tim und Jens befinden sich auf abtauchenden Bahnen, Kim auf einer auftauchenden Bahn.
g_{Tim} und g_{Kim} schneiden sich in $S(12\,|\,6\,|-0,75)$.
g_{Tim} und g_{Jens} sind windschief; Abstand $d = 1,013$.
g_{Kim} und g_{Jens} sind windschief; Abstand $d = 2,672$.

d) $\varepsilon_{schief} : 5y - 12z = 87$ Schnittpunkt mit g_{Jens} ist $P(6,25\,|\,12\,|-2,25)$.

e) Abstand $d = 1,013$.

f) Nein, der Schnittpunkt mit der Wasseroberfläche (Ebene $z = 0$) wäre $W(15,\overline{6}\,|\,7,\overline{6}\,|\,0)$. Dieser Punkt liegt nicht mehr im Beckenbereich.

Kim stößt im Punkt $K(12,5\,|\,6,227\,|-0,648)$ an die seitliche Beckenbegrenzung (Ebene $x = 12,5$).

g) Tim wird auf seiner Tauchbahn im Punkt $T(12,5\,|\,6\,|-0,792)$ an die vordere seitliche Begrenzungswand (Ebene $x = 12,5$) stoßen.

h) Beispielsweise $g : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ -0,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ -0,25 \end{pmatrix}$

44 a) Die Länge möglicher Wege (in m) beträgt:

Entlang der Raumkanten: $w_1 = 3 + 6 + 8 = 17$

Entlang einer Flächendiagonale und einer Kante:

$w_2 = \sqrt{36 + 64} + 3 = 13$

$w_3 = \sqrt{9 + 64} + 6 = 14,5$

$w_4 = \sqrt{9 + 36} + 8 = 14,7$

b) Der Weg über die Flächendiagonale der größten Fläche ist am kürzesten (w_2).

c) Mögliche Wege:

Von P zu $A(6\,|\,0\,|\,0)$; dann entlang der Flächendiagonalen zu $C(0\,|\,8\,|\,0)$. Von dort die Raumkante hoch zu $F(0\,|\,8\,|\,3)$ und dann zu Q.

Weglänge: $w_5 = \sqrt{2} + 10 + 3 + \sqrt{2}) \approx 15,83$ (in m).

Von P senkrecht zu $S(5\,|\,0\,|\,0)$, dann zu $R(1\,|\,8\,|\,0)$. Von dort senkrecht hoch zu Q.

Weglänge: $w_6 = 1 + |\overline{RS}| + 2 \approx 11,94$ (in m).

330 Den kürzesten Weg erhält man, wenn man den Quader in die Ebene ε_{xy} aufklappt und das Problem zunächst 2-dimensional betrachtet.

Der Punkt P wird dann zu $P'(5\,|-1)$, Q wird zu $Q'(1\,|\,10)$ und die Verbindungsstrecke hat die Länge

$d = \sqrt{121+16} = \sqrt{137} \approx 11,704$ (in m).

Die Verbindungsstrecke liegt auf der Geraden zu $y = -\frac{11}{4}x + \frac{51}{4}$.

Sie schneidet die Geraden zu $y = 0$ und $y = 8$ in den Punkten

$S_1'(\frac{51}{11}\,|\,0)$ und $S_2'(\frac{19}{11}\,|\,8)$.

Daraus ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(\frac{51}{11}\,|\,0\,|\,0)$ und $S_2(\frac{19}{11}\,|\,8\,|\,0)$.

d) für a) und für b) ist der Luftweg jeweils 9 m, denn : $|\overline{PQ}| = \sqrt{16+64+1} = 9$.

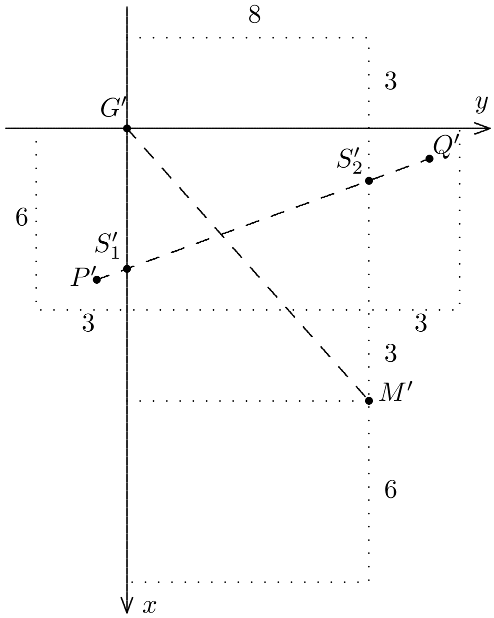

Bild 40/1: In xy-Ebene aufgeklappter Quader

331 **45 a)** $P(0\,|-3\,|\,0)$, $Q(-4\,|\,0\,|\,0)$, $R(0\,|\,5\,|\,12)$, $S(-4\,|\,5\,|\,12)$, $T(-4\,|\,5\,|\,15)$

b) Ebene $\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; Normalengleichung $\varepsilon : y = 5$.

c) parallele Ebenen: $\varepsilon_1 : y = 0$, $\varepsilon_2 : y = -3$, $\varepsilon_3 : y = -8$

senkrechte Ebenen: $\varepsilon_4 : z = 0$, $\varepsilon_5 : z = 12$, $\varepsilon_6 : z = 15$, $\varepsilon_7 : x = 0$, $\varepsilon_8 : x = -4$

d) Volumen: $300\,cm^3$; Gewicht: $150\,g$

e) $R'(12\,|\,5\,|\,0)$; Entfernung zum Koordinatenursprung: $13\,cm$

Abbildungsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $R''(0\,|\,13\,|\,0)$; Entfernung zum Koordinatenursprung: $13\,cm$; Drehwinkel: $\alpha = 67,38°$.

Wir betrachten die Einheitsvektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eine Drehung nach rechts mit α um die x-Achse lässt $\vec{e_1}$ unverändert.

Aus $\vec{e_2}$ wird der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$ und aus $\vec{e_3}$ der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Es gilt $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ und $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; daraus ergibt sich die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

46 a) parallele Ebenen: $\varepsilon_1 : y = 0$, $\varepsilon_2 : y = -3$, $\varepsilon_3 : y = 2$

senkrechte Ebenen: $\varepsilon_4 : z = 0$, $\varepsilon_5 : z = 6$, $\varepsilon_6 : z = 9$, $\varepsilon_7 : z = 12$, $\varepsilon_8 : z = 15$, $\varepsilon_9 : x = 0$, $\varepsilon_{10} : x = -4$

Volumen: $264\,cm^3$; Gewicht: $132\,g$

b) Mit der Abbildungsmatrix aus Aufgabe 14e) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$; Bildpunkt $A'(6\,|\,2\,|\,0)$.

Entfernung vom Koordinatenursprung: $d = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.

Mit der Abbildungsmatrix aus Aufgabe 14f) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{82}{13} \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix}$$; Bildpunkt $A'(0\,|\,\frac{82}{13}\,|\,\frac{6}{13})$.

Entfernung vom Koordinatenursprung:

$$d = \sqrt{\left(\frac{82}{13}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\right)^2} = \frac{1}{13}\sqrt{6724+36} = \frac{1}{13}\sqrt{6760} = \sqrt{40}.$$

c) Lösung mit Hilfe der Linearen Algebra:

Der gesuchte Punkt $A(0\,|\,a\,|\,6)$ muss auf der Geraden g durch den Koordinatenursprung und R liegen.

$$g:\ \vec{x} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5r \\ 12r \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} a = 2,5 \\ r = 0,5; \end{matrix}$$

also ist $A(0\,|\,2,5\,|\,6)$.

Lösung mit Hilfe der Strahlensätze:

$\frac{5}{12} = \frac{a}{6} \quad\Rightarrow\quad a = 2,5$ und daher ist $A(0\,|\,2,5\,|\,6)$.

331 **47 a)** $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0,4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

b) $|\overline{F_1F_2}| = 1,9$ (km); Geschwindigkeit $v = 456$ ($\frac{\text{km}}{h}$)

c) $F_3(4,25 \,|\, 5,5 \,|\, 2,5)$

d) Ortungsstrahl $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$;

Schnitt mit g liefert $y = 2$ und $t = 4$, also $F_4(8 \,|\, 8 \,|\, 4)$.

332 **48** Die Geraden sind windschief. Der Abstand beträgt $d = 0,5$. Mit 500 m in der Vertikalen ist der Abstand groß genug, der Fluglotse muss nicht eingreifen. Der Punkt $P(0 \,|\, 0 \,|\, 8)$ ist Punkt der Geraden g. Das Flugzeug mit dieser Flugbahn überfliegt den Tower in 8 km Höhe.

49 a) Die Holme sind parallel. Die Richtungsvektoren von g und h sind gleich, der Ortsvektor unterschiedlich. Die Gitterstäbe sind senkrecht zu den Holmen. Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren von g und h mit dem Richtungsvektor von k_a ist jeweils Null.

b) Holme: Anfangspunkt $P_0(2 \,|\, 300 \,|\, 10)$; Endpunkt $P_{20}(202 \,|\, 100 \,|\, 10)$; Länge der Holme $|\overline{P_0, P_{20}}| = 200\sqrt{2} \approx 282,843$.

Gitterstäbe: Länge der Gitterstäbe $d = 90$.

c) Verbindungspunkte: $P_a(2+10a \,|\, 300-10a \,|\, 10)$ und $Q_a(2+10a \,|\, 300-10a \,|\, 100)$ für $a = 0; 1; 2; \ldots; 20$.

d) $P'_a(22+10a \,|\, 310-10a \,|\, 0)$; $Q'_a(202+10a \,|\, 400-10a \,|\, 0)$ für $a = 0; 1; 2; \ldots; 20$.

e) Länge des Schattens der Holme $|\overline{P'_0, P'_{20}}| = 200\sqrt{2} \approx 282,843$.

Länge des Schattens der Gitterstäbe $|\overline{P'_a, Q'_a}| = 10\sqrt{405} \approx 201,246$.

f) $\alpha = 24,095°$

g) $P''_a(2,05+10,25a \,|\, 302,5-10,25a \,|\, 0)$; $Q''_a(2,645+13,226a \,|\, 332,258-13,226a \,|\, 0)$ für $a = 0; 1; 2; \ldots; 20$.

h) Länge des Schattens des unteren Holmes:

$P''_0(2,05 \,|\, 302,5 \,|\, 0)$, $P''_{20}(207,05 \,|\, 97,5 \,|\, 0)$, $|\overline{P''_0P''_{20}}| = 205\sqrt{2} \approx 289,914$.

Länge des Schattens des oberen Holmes:

$Q''_0(2,645 \,|\, 332,258 \,|\, 0)$, $Q''_{20}(267,16 \,|\, 67,74 \,|\, 0)$, $|\overline{Q''_0Q''_{20}}| = 264,52\sqrt{2} \approx 374,09$.

Länge des Schattens der Gitterstäbe: 332

$$|\overline{P_a''Q_a''}| = \sqrt{(\frac{410}{310} - \frac{410}{400})^2(2+10a)^2 + (\frac{410}{310} - \frac{410}{400})^2(100-10a)^2}$$
$$= \frac{369}{1240}\sqrt{10004 - 1960a + 200a^2} \quad \text{für} \quad a = 0; 1; 2; \ldots ; 20.$$

Jeder Gitterstab hat eine andere Schattenlänge.

50 Koordinaten der übrigen Punkte: $D(0\,|-1\,|\,5)$, $E(1\,|\,0\,|\,5)$, $F(0\,|\,1\,|\,5)$, $G(0\,|\,0\,|\,6)$ 333

$$g_{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad g_{BA} : x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$|\overline{BC}| = \sqrt{2}$, $|\overline{BA}| = \sqrt{2}$, $|\overline{GE}| = \sqrt{2}$, $|\overline{GF}| = \sqrt{2}$.

Winkel zwischen g_{BC} und g_{BA}: $\beta = 90°$.

Winkel zwischen $\varepsilon_{EFG} : x + y + z = 6$ und $\varepsilon_{BCE} : x + y = 1$: $\beta \approx 35{,}264°$.

Winkel zwischen ε_{EFG} und $\varepsilon_{EDG} : x - y + z = 6$: $\beta \approx 70{,}529°$.

51 a) Die Dachfläche liegt in der Ebene

$$\varepsilon_{PQR} : \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\10\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} \text{ oder } \varepsilon_{PQR} : x + z = 18.$$

Die zur xy-Ebene senkrechte Gerade g_{AE} durch den Punkt A hat die Gleichung

$$g_{AE} : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\15\\15\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Punkt $E(5\,|\,15\,|\,13)$ ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

Entsprechend erhält man $F(5\,|\,15{,}5\,|\,13)$, $G(4{,}5\,|\,15{,}5\,|\,13{,}5)$ und $H(4{,}5\,|\,15\,|\,13{,}5)$.

b) Fläche $A = 0{,}5\sqrt{2{,}5} \approx 0{,}79\,(m^2)$.

c) Der Sonnenstrahl durch den Punkt A liegt auf der Geraden h mit der Gleichung

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\15\\15\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt $A'(6\,|\,13\,|\,12)$ ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene ε_{PQR}.

Entsprechend erhält man $B'(6\,|\,13{,}5\,|\,12)$, $C'(5{,}25\,|\,14\,|\,12{,}75)$ und $D'(5{,}25\,|\,13{,}5\,|\,12{,}75)$, wobei C' im Schattenraum liegt.

334 **52 a)** Es sind $A(8\,|\,0\,|\,0)$, $B(8\,|\,20\,|\,0)$, $C(0\,|\,20\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$ die Eckpunkte des Dachbodens, $E(4\,|\,4\,|\,4)$ und $F(4\,|\,16\,|\,4)$ die Eckpunkte des Dachfirstes.

$\varepsilon_{\text{Dachboden}} : z = 0;$ $\quad \varepsilon_{ABE} : x + z = 8;$ $\quad$ Schnittwinkel $\beta = 45°$

$\varepsilon_{\text{Dachboden}} : z = 0;$ $\quad \varepsilon_{DAE} : -y + z = 0;$ $\quad$ Schnittwinkel $\beta = 45°$

b) Winkel $\beta = 60°$

c) Länge des Grats $|\overline{DE}| = 16\sqrt{3}$, Winkel: $\beta = 35,264°$

Die Firsthöhe müsste $4\sqrt{3}\ m$ betragen; also $E'(4\,|\,4\,|\,4\sqrt{3})$ und $F'(4\,|\,16\,|\,4\sqrt{3})$.

53 Es sind $P(8\,|\,0\,|\,10)$, $Q(8\,|\,20\,|\,10)$, $R(0\,|\,20\,|\,10)$, $S(0\,|\,0\,|\,10)$ die Eckpunkte des Dachbodens, $U(4\,|\,4\,|\,14)$ und $V(4\,|\,16\,|\,14)$ die Eckpunkte des Dachfirstes, wenn angenommen wird, dass das Haus eine Höhe von 10 m bis zum Dachboden hat.

Beim Anbau sind $A(8\,|\,8\,|\,8)$, $B(16\,|\,8\,|\,8)$, $C(16\,|\,16\,|\,8)$ und $D(8\,|\,16\,|\,8)$ die Eckpunkte des Dachbodens, $E(16\,|\,12\,|\,12)$ der Eckpunkt des Dachfirstes.

Gesucht sind die Koordinaten des Punktes F, in dem der Dachfirst des Anbaus auf die Dachfläche des Hauses trifft.

Die Dachfläche liegt in der Ebene mit der Gleichung $\varepsilon_{PQU} : x + z = 18$.

Der Dachfirst des Anbaus liegt auf einer Geraden mit der Gleichung

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt der Ebene ε_{PQU} mit der Geraden g ist $F(6\,|\,12\,|\,12)$ mit $r = 10$.

a) Um die Länge der Kehle zu bestimmen, brauchen wir den Punkt G als Schnittpunkt der Traufe mit der Dachfläche des Anbaus:

Die Traufe liegt auf der Geraden mit der Gleichung $h : x = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Dachfläche des Anbaus liegt in der Ebene mit der Gleichung $\varepsilon_{ABE} : y - z = 0$.

Der Schnittpunkt der Ebene ε_{ABE} mit der Geraden h ist $G(8\,|\,10\,|\,10)$ mit $t = 10$.

Länge der Kehle: $|\overline{FG}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2\,\sqrt{3}$.

b) Länge der Dachrinne auf der linken Seite:

$$|\overline{PG}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 10.$$

Länge der Dachrinne auf der rechten Seite:

Der Schnittpunkt der Ebene $\varepsilon_{CDE}: y + z = 24$ mit der Geraden h ist $H(8\,|\,14\,|\,10)$ mit $t = 14$.

$$|\overline{HQ}| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right| = 6.$$

c) Länge des Dachfirstes des Anbaus: $|\overline{FE}| = \left|\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 10.$

54 Der durch A gehende Sonnenstrahl liegt auf der Geraden g_A mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}220\\0\\80\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

Diese Gerade schneidet die xy-Ebene genau dann, wenn die z-Komponente von $\vec{x}$ gleich null ist, also $r = 20$. Daher ist $A'(320\,|\,60\,|\,0)$.

Entsprechend:

$$g_B: \vec{x} = \begin{pmatrix}100\\0\\80\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}; \text{ mit } s = 20 \text{ folgt } B'(200\,|\,60\,|\,0).$$

$$g_C: \vec{x} = \begin{pmatrix}220\\0\\200\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}; \text{ mit } t = 50 \text{ folgt } C'(470\,|\,150\,|\,0).$$

Da der Raum durch die Wand $\varepsilon_{Wand}: x = 400$ begrenzt wird, liegt der Bildpunkt C'' auf der Wand, d.h. die x-Komponente muss gleich 400 sein.

Daher ist $C''(400\,|\,108\,|\,56)$ mit $t = 36$; die senkrechte Projektion von C'' ist $C_0(400\,|\,108\,|\,0)$.

$$g_D: \vec{x} = \begin{pmatrix}100\\0\\200\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}; \text{ mit } d = 50 \text{ folgt } D'(350\,|\,150\,|\,0).$$

Bild der Fensterkante $\overline{AB}$: $\quad \overline{A'B'}: \vec{x} = \begin{pmatrix}320\\60\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-120\\0\\0\end{pmatrix}$ mit $k \in [0;1]$.

Bild der Fensterkante $\overline{BD}$: $\quad \overline{B'D'}: \vec{x} = \begin{pmatrix}200\\60\\0\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}150\\90\\0\end{pmatrix}$ mit $l \in [0;1]$.

334 Bild der Fensterkante $\overline{AC}$

auf dem Fußboden: $\overline{A'C_0} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 320 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $m \in [0; 1]$;

an der Wand: $\overline{C_0C''} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 108 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 56 \end{pmatrix}$ mit $n \in [0; 1]$.

Bild der Fensterkante $\overline{DC}$ Die Gerade $g_{D'C'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 320 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

schneidet die Ebene $\varepsilon_{Wand} : x = 400$ im Punkt $P(400 \,|\, 150 \,|\, 0)$, daher ist das Bild der Fensterkante

auf dem Fußboden: $\overline{D'C'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 320 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $p \in [0; 1]$;

an der Wand: $\overline{PC''} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ -42 \\ 56 \end{pmatrix}$ mit $q \in [0; 1]$.

55 Zunächst legt man ein Koordinatensystem so fest, dass sein Ursprung mit dem Schwerpunkt des Tetraeders zusammenfällt. Die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ der Eckpunkte des Tetraeders sind dann aus Symmetriegründen gleich lang; es ist also

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|.$$

Ebenfalls aus Symmetriegründen sind die Winkel zwischen je zwei dieser Ortsvektoren sowie deren Skalarprodukte gleich groß; es gilt also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d}.$$

Für den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schwerpunktes eines Tetraeders gilt $\vec{s} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$. Da $\vec{s} = \vec{0}$ ist, gilt also

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^{\,2} + 3\,\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\tfrac{1}{3}\,\vec{a}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-\frac{1}{3}\,\vec{a}^{\,2}}{|\vec{a}|^{\,2}} = -\tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 109,47°.$$

335 **56 a)** Mit den Daten der Tabelle erhält man das Gleichungssystem ($c = 299792,458$)

$$\begin{aligned}
(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-26581)^2 &= c^2 \cdot (t-0,02706609)^2 \\
(x-10181,114)^2 + (y-17634,206)^2 + (z-17085,937)^2 &= c^2 \cdot (t-0,02802218)^2 \\
(x-24598,498)^2 + (y+8953,121)^2 + (z-4615,742)^2 &= c^2 \cdot (t-0,02315291)^2 \\
(x-8953,121)^2 + (y+1578,677)^2 + (z-24977,97)^2 &= c^2 \cdot (t-0,03087046)^2
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen 335

$$x = 3777,738118 \wedge y = 898,4281569 \wedge z = 5063,535764 \wedge t = 0,1.$$

Der zugehörige Punkt hat also die kartesischen Koordinaten

$$P(3777,738118|898,4281569|5063,535764).$$

b) Ist P ein Punkt mit den kartesischen Koordinaten $P(x|y|z)$ und den geographischen Koordinaten $P(l|b|h)$ (l und b in °, h in m), dann gilt:

$$\begin{aligned} x &= (6381 + \tfrac{h}{1000}) \cdot \cos l \cdot \cos b \\ y &= (6381 + \tfrac{h}{1000}) \cdot \sin l \cdot \cos b \qquad \Rightarrow \\ z &= (6381 + \tfrac{h}{1000}) \cdot \sin b \end{aligned}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin l}{\cos l} = \tan l$$

$$\frac{z^2}{x^2+y^2} = \frac{(6381 + \frac{h}{1000})^2 \cdot \sin^2 b}{(6381 + \frac{h}{1000})^2(\cos^2 l \cdot \cos^2 b + \sin^2 l \cdot \cos^2 b)} = \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} = \tan^2 b$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (6381 + \tfrac{h}{1000})^2(\cos^2 l \cdot \cos^2 b + \sin^2 l \cdot \cos^2 b + \sin^2 b) = (6381 + \tfrac{h}{1000})^2$$

Löst man nach l, b und h auf, so erhält man

$$\begin{aligned} l &= \arctan \frac{y}{x} \\ b &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ h &= 1000(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 6381). \end{aligned}$$

Probe für die Daten der Zugspitze:

$$\begin{aligned} l &= \arctan \frac{822,903}{4240,603} &&= 10,981944 \\ b &= \arctan \frac{4700,117}{\sqrt{4240,603^2 + 822,903^2}} &&= 47,415 \\ h &= 1000(\sqrt{4240,603^2 + 822,903^2 + 4700,117^2} - 6381) = 2650. \end{aligned}$$

c) Für $P(3777,738118|898,4281569|5063,535764)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} l &= \arctan \frac{898,4281569}{3777,738118} = 13,377708 \\ b &= \arctan \frac{5063,535764}{\sqrt{3777,738118^2 + 898,4281569^2}} = 52,5162724 \\ h &= 1000(\sqrt{3777,738118^2 + 898,4281569^2 + 5063,535764^2} - 6381) = 56,05. \end{aligned}$$

Länge und Breite entsprechen der Lage des Brandenburger Tores in Berlin. Die Basis liegt in einer Höhe von $34\,m$ über NN; das Tor ist $20\,m$ hoch. Der Messpunkt liegt im Bereich der Quadriga.

335 **d)** Wenn sich die drei Satelliten und der Empfänger in derselben Ebene befinden, kann der Messpunkt nicht eindeutig bestimmt werden. Alle Punkte der Geraden durch den Messpunkt, die auf der gemeinsamen Ebene senkrecht steht, erfüllen die Messwerte.

336 **57 a)** $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & -6\\4 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\26\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3 & 1\\3 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-3 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & -5\\5 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & -3\\5 & -5\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}34\\0\end{pmatrix}$

58 a) Überprüfung der Gesetze an jeweils zwei Beispielen:

(1) Kommutativgesetz:

$$\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}56\\33\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}56\\33\end{pmatrix}$$

(2) Assoziativgesetz:

$$\left[\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-6\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\-5\end{pmatrix}$$

336

$$\left[\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -130 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ -130 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ -130 \end{pmatrix}$$

(3) Distributivgesetz:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -9 \end{pmatrix}$$

b) Überprüfung der Gesetze für beliebige Vektoren:

(1) Kommutativgesetz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -c \\ b & d \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} c & b \\ d & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & -a \\ d & b \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - db \\ cb + da \end{pmatrix}$$

Die Terme stimmen überein wegen der Kommutativität der reellen Zahlen bezüglich der Addition und Multiplikation.

(2) Assoziativgesetz:

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right] \otimes \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -c \\ b & d \end{vmatrix} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

336

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ac-bd & f \\ ad+bc & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ac-bd & -e \\ ad+bc & f \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ace-bde-adf-bcf \\ acf-bdf+ade+bce \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} c & f \\ d & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & -e \\ d & f \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} ce-df \\ cf+de \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & cf+de \\ b & ce-df \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -(ce-df) \\ b & cf+de \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ace-adf-bcf-bde \\ acf+ade+bce-bdf \end{pmatrix}$$

Die Terme stimmen überein, da die reellen Zahlen bezüglich der Addition und Multiplikation kommutativ und assoziativ sind.

(3) Distributivgesetz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \left[\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & d+f \\ b & c+e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -(c+e) \\ b & d+f \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac+ae-b(d+f) \\ ad+af+bc+be \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd+ae-bf \\ ad+bc+af+be \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -c \\ b & d \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & f \\ b & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -e \\ b & f \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae-bf \\ af+be \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd+ae-bf \\ ad+bc+af+be \end{pmatrix}$$

Die Terme stimmen überein, da die reellen Zahlen bezüglich der Addition und Multiplikation kommutativ sind und das Distributivgesetz gilt.

59 a) Überprüfung der Behauptung an zwei Beispielen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

336

Überprüfung der Behauptung für beliebige Vektoren:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Wegen der Kommutativität gilt auch:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

b) Überprüfung der Behauptung an drei Beispielen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Behauptung für beliebige Vektoren mit x,y $\in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & -y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Beispiel eines „zusammengesetzten“ Vektors: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der erste Teil $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nach der Überlegung aus 59 b) eine reelle Zahl.

Damit ergibt sich: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Beispiele für die Kunomultiplikation mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wirkungsweise mit einem beliebigen Vektor:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

336 Kunoquadrat:

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1$$

e) Nach c) entspricht $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ der reellen Zahl -1; sie ist nach d) das Kunoquadrat von $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Mit der Definition $i = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich i^2 = -1 und $i = \sqrt{-1}$.

60 Die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ lassen sich als zusammengesetzte Vektoren bzw. komplexe Zahlen so darstellen:

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3 + 4i \qquad \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 5 + 6i$$

Das Produkt kann man, bis auf die Besonderheit, dass i^2 = -1 ist, einfach nach den üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen bestimmen:

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = (3+4i)(5+6i) = 15 + 18i + 20i + 24i^2$$

$$= 15 + 38i - 24 = -9 + 38i = \begin{pmatrix}-9\\38\end{pmatrix}$$

61 (2 + 4i)(6 + i) = 12 + 2i + 24i – 4 = 8 + 26i

(2 + 2i)(1 + i) = 2 + 2i + 2i – 2 = 0 + 4i

(-3 + 3i)(-1 + i) = 3 – 3i – 3i –3 = 0 – 6i

(3 + 5i)(3 – 5i) = 9 + 25 = 34