

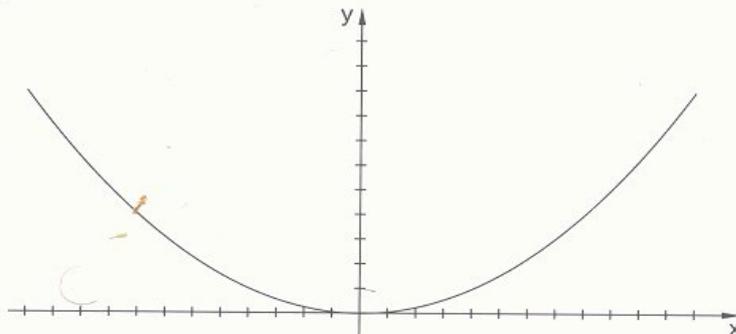
Nordrhein-Westfalen – Mathematik Leistungskurs
Analysis: Übungsaufgabe 3

Abkühlung einer Flüssigkeit

Eine Schüssel hat die Form eines Paraboloids. Die innere Querschnittsfunktion der Schüssel hat die Gleichung

$$y = \frac{1}{16}x^2.$$

1 LE = 1 cm



1. Die innere Höhe der Schüssel beträgt 9 cm.
 - a) Berechnen Sie den inneren Durchmesser der Schüssel.
 - b) Berechnen Sie das Fassungsvermögen der Schüssel.
 - c) In die Schüssel wird 1 ℓ Wasser gegossen. Bestimmen Sie die Höhe des Wassers in der Schüssel.

2. Die Schüssel wurde mit einer heißen Flüssigkeit gefüllt und zum Abkühlen auf den Balkon gestellt. Der zeitliche Verlauf der Temperatur wird beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = 70 \cdot (1 + e^{-at}) - 50, \quad a > 0,$$
 wobei t die Zeit in Minuten nach dem Herausbringen auf den Balkon ist und $f(t)$ die Temperatur der Flüssigkeit in °C angibt.
 - a) Begründen Sie, warum die Funktion $f(t)$ einen Abkühlungsvorgang beschreibt.
 - b) Bestimmen Sie die Temperaturen, die die Flüssigkeit in der Schüssel annehmen kann.
 - c) Es ist $a = 0,15$. Bestimmen Sie die Zeit, in der sich die Temperatur der Flüssigkeit in der Schüssel halbiert hat.

3. Das Newton'sche Abkühlungsgesetz lautet:

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-at}, \quad a > 0.$$
 Hierbei ist T_0 die Anfangstemperatur, T_U die Umgebungstemperatur und a eine vom Material abhängige Konstante.

- a) Stellen Sie die Funktion $f(t)$ in der Form des Newton'schen Abkühlungsgesetzes dar und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil 2 b.
- b) Leiten Sie das Gesetz zur Bestimmung der Abkühlungsgeschwindigkeit her und diskutieren Sie den Einfluss der Umgebungstemperatur auf die Abkühlungsgeschwindigkeit.
- c) Begründen Sie, warum der Abkühlungsvorgang angegeben werden kann durch die Differenzialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = -a(T(t) - T_U) \quad \text{mit} \quad T'(t) = \frac{dT}{dt}.$$