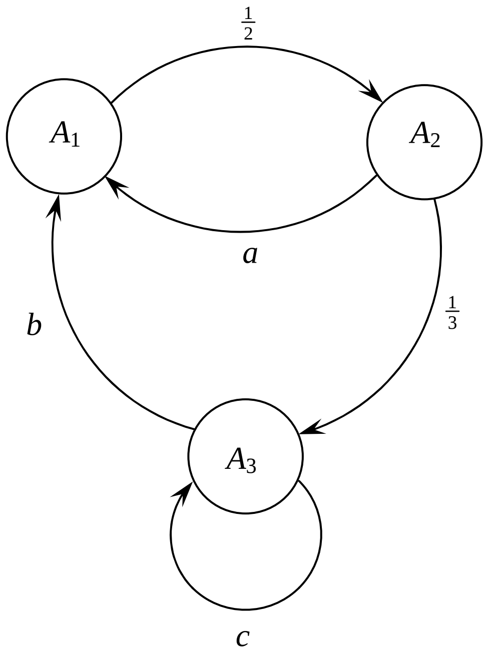
Modelllösung a)



a ist die jährliche Vermehrungsrate eines ausgewachsenen Maulwurfs, *b* ist die jährliche Vermehrungsrate eines Alttieres, *c* ist die jährliche Überlebensrate eines Alttieres (Anteil der Alttiere, die auch im folgenden Jahr noch leben).

Modelllösung b)

(1) Ein ausgewachsenes Tier überlebt entweder (Übergang zu A_3) oder es stirbt und dafür wird ein Jungtier von einem ausgewachsenen Tier geboren (Übergang zu A_1). Daher ist die Anzahl der „Nachfolger“ der ausgewachsenen Tiere in der nächsten Generation gleich der Anzahl dieser Tiere zu einem gegebenen Zeitpunkt. Die Spaltensumme in der 2. Spalte der Matrix muss in diesem Fall 1 betragen, es gilt daher $a = \frac{2}{3}$.

(2) Die Entwicklung von Populationen, in denen Maulwürfe nicht älter als drei Jahre werden, wird durch Matrizen $M_{\mathrm{a,b,c}}$ mit $c = 0$ beschrieben.

(3) Da nur $\frac{1}{3}$ der Jungtiere als ausgewachsene Maulwürfe und nur $\frac{1}{2}$ der ausgewachsenen Maulwürfe als Alttiere überleben, sinkt die Anzahl der Maulwürfe beim Übergang von Jungtieren zu Alttieren auf $\frac{1}{6}$ der Größe. Die Population wächst daher für $b > 6$.

Modelllösung c)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & b \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 270 \\ 135 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 135 \\ 50 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 135 + b \cdot 50 = 270 \\ \wedge \\ \frac{1}{2} \cdot 270 = 135 \\ \wedge \\ \frac{1}{3} \cdot 135 + c \cdot 50 = 50 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b = \frac{18}{5} \\ \wedge \\ c = \frac{1}{10} \end{array}$$

Modelllösung d)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 45 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Die Population besteht nach einem Jahr aus 46 Jungtieren, 45 ausgewachsenen Tieren und 23 Alttieren.

Da verglichen mit der Anfangspopulation die Anzahl der Tiere in jeder der Entwicklungsstufen abgenommen hat, sinkt die Anzahl der Maulwürfe. Langfristig wird die Population unter diesen Bedingungen aussterben.

Modelllösung e)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{5} x_3 = 50 \\ \wedge \\ \frac{1}{2} x_1 = 25 \\ \wedge \\ \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{10} x_3 = 25 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 50 \\ \wedge \\ x_2 = \dfrac{-3 \cdot (x_3 - 250)}{10} \end{array}$$

Eine Ausgangspopulation könnte bestehen
aus 50 Jungtieren, 0 ausgewachsenen Tieren und 250 Alttieren
oder aus 50 Jungtieren, 75 ausgewachsenen Tieren und 0 Alttieren
oder aus 50 Jungtieren, 45 ausgewachsenen Tieren und 100 Alttieren …

Wegen $x_3 \geq 0$ gilt $x_2 \leq 75$, wegen $x_2 \geq 0$ gilt $x_3 \leq 250$.

In jeder möglichen Ausgangspopulation gibt es genau 50 Jungtiere. Die Anzahl der ausgewachsenen Tiere muss kleiner oder gleich 75 sein, die Anzahl der Alttiere kleiner oder gleich 250.

Modelllösung a)

$f'(t) = (-0{,}396t - 0{,}66)e^{0{,}3t-1{,}5}$ (Produkt- und Kettenregel)

Bestimmung des absoluten Maximums:

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}396t - 0{,}66 = 0 \Leftrightarrow t = -1\frac{2}{3}$, da $e^{0{,}3t-1{,}5} \neq 0$

$f''(-1\frac{2}{3}) \approx \; 0{,}05 \;\; 0$ (alternativ VZW (+/–) von $f'(t)$ bei $t = -1\frac{2}{3}$)

$\Rightarrow$ lokales Maximum bei $t = -1\frac{2}{3}$

$f(-1\frac{2}{3}) \approx 0{,}6(\frac{m}{h})$

Randwertbetrachtung:

$f(-9) \approx 0{,}21 < f(-1\frac{2}{3})$ und $f(3) \approx -0{,}97 < f(-1\frac{2}{3})$

$\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $t = -1\frac{2}{3}$

[Alternativ kann argumentiert werden, dass bei nur einem Extremum dieses das absolute Extremum ist.]

Nullstelle: $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1\frac{2}{3}$

Modelllösung b)

Die Anstiegsgeschwindigkeit nimmt von 15.00 Uhr bis 22.20 Uhr zu, erreicht dann ein Maximum von 0,6 m/h und nimmt dann bis 1.40 Uhr ab. Um 1.40 Uhr steigt das Wasser nicht mehr. Von 1.40 Uhr bis 3.00 Uhr sinkt der Wasserstand wieder, der Pegel fällt. Danach würde er immer schneller weitersinken und der Pegel fiele ins „Negativ-Unendliche“. Daher ist das Modell nur bis 3.00 Uhr sinnvoll.

Modelllösung c)

Gesucht ist ein Maximum der ersten Ableitung

(Wendestelle von Links- in Rechtskurve): $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \;\; 5$, da $e^{0{,}3t-1{,}5} \neq 0$

$f''(-5{,}1) \approx 0{,}0006 \;\; 0$, $f''(-4{,}9) \approx \;\; 0{,}0006 \; -0 \qquad <$

- $\Rightarrow$ VZW (+/–) von $f''(t)$ bei $t = -5$ (alternativ: $f'''(-5) < 0$)
- $\Rightarrow$ Um 19.00 Uhr änderte sich die Anstiegsgeschwindigkeit am stärksten.

Modelllösung d)

(1) Durch das Ableiten der Funktion F mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel erhält man:

$$F'(t) = (-4,4)e^{0,3t-1,5} + (-4,4t - 22) \cdot 0,3e^{0,3t-1,5} = (-1,32t - 2,2) \cdot e^{0,3t-1,5} = f(t)$$

(2) Die Extremstelle von F ist die Nullstelle von f.

$$F'(t) = f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1\tfrac{2}{3}$$

$F''(1\tfrac{2}{3}) = f'(1\tfrac{2}{3}) \approx -0,49 < 0$ (alternativ VZW (+/–) von $f'(t)$ bei $t = 1\tfrac{2}{3}$)

$\Rightarrow$ Bei $t = 1\tfrac{2}{3}$ liegt ein lokales Maximum: $F(1\tfrac{2}{3}) \approx 5,4$ [m].

Randwertbetrachtung:

$F(-9) \approx 0,92 < F(1\tfrac{2}{3})$ und $F(3) \approx 4,8 < F(1\tfrac{2}{3})$

[Die Randwertbetrachtung kann durch andere Überlegungen ersetzt werden.]

Um 1.40 Uhr wird der höchste Wasserstand mit ca. 5.40 Meter über dem üblichen Pegel erreicht, da bis dahin das Wasser steigt (positive Anstiegsgeschwindigkeit) und ab da wieder Wasser abfließt (negative Anstiegsgeschwindigkeit).

Modelllösung e)

Der Term gibt die mittlere Änderungsrate des Wasserstandes (mittlere Anstiegsgeschwindigkeit) in der Zeit von 15.00 bis 22.00 Uhr an.

$$m = \tfrac{1}{-2-(-9)} \cdot \int_{-9}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{7}(F(-2) - F(-9)) \approx \tfrac{1}{7}(3,77 - 0,92) \approx 0,41 \text{ [m/h]}$$

Modelllösung a)

(1) Mögliche Parametergleichung von E_{ABC} :

$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{A}} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-5\\6\\34\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}20\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-8\\-32\end{pmatrix} \quad (r, s \in IR)$$

Gleichsetzen mit $D : \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-2\\2\end{pmatrix}$ ergibt das LGS $\begin{array}{cc} r & s \\ \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 \\ 9 & -32 & -32 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}$,

dieses ist für $r = 0$ und $s = 1$ erfüllt, es gilt somit $D \in E_{\text{ABC}}$.

(2) Skalarprodukt: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}20\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-8\\-32\end{pmatrix} = 0$, also rechter Winkel bei B.

(3) Mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 20$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-32)^2} \approx 32{,}98$ ist die Rechtecksfläche A_{R} ca.

$20 \text{ m} \cdot 32{,}98 \text{ m} = 659{,}6 \text{ m}^2$ groß. Für die Spiegelfläche werden also mehr als 650 m^2 benötigt.

(4) Die Stahlstützen der Skulptur würden zum einen durch die Masse der Spiegelfläche belastet. Eine weitere Belastung wäre durch den großen Windwiderstand einer derartigen Spiegelfläche gegeben.

Modelllösung b)

(1) Bedeutung des Koeffizienten Null vor x:

Die x-Koordinate von Punkten auf F ist beliebig, die x-Achse verläuft parallel zur Ebene F.

(2) Schnittgerade:

Aus der Parameterform von E_{ABC}: $x = -5 + 20 \cdot r$, $y = 6 - 8 \cdot s$ und $z = 34 - 32 \cdot s$.

Einsetzung in $F: y + 6z = 10$ liefert $6 - 8 \cdot s + 6 \cdot (34 - 32 \cdot s) = 10$ und dann $s = 1$.

Eingesetzt z. B. in E_{ABC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) D liegt auf der Schnittgeraden (hier für $r = 0$) oder durch Punktprobe mit F.

Modelllösung c)

(1) Gerade längs der Stütze 1: $g_1: \vec{x} = \vec{x}_{S_1} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (r \in I\!R)$

Gerade durch A und B: $g_{\text{AB}}: \vec{x} = \vec{x}_{\text{A}} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in I\!R)$

LGS nach Gleichsetzen:
$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc|c} r & s & \\ \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -20 & -16 \\ -4 & 0 & -16 \\ 9 & 0 & 36 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \end{array}$$

liefert aus (I) $s = \frac{4}{5}$, aus (II) $r = 4$,

nach Probe in (III) erhält man aus g_1: $\vec{x}_{T_1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix}$,

also $T_1(11 \,|\, 6 \,|\, 34)$.

(Alternative Berechnung auch nur über die Höhenkoordinate möglich.)

Die Stütze 1 ist $\left| 4 \cdot \vec{v} \right| = 4 \cdot \sqrt{(-4)^2 + 9^2} \approx 39{,}4\,\text{m}$ lang.

(2) $\overrightarrow{BT_1} = \vec{x}_{T_1} - \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{x}_{T_2} = \vec{x}_A + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix}$.

Der Abstand zwischen den Befestigungspunkten beträgt $\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = 12\ \text{m}$.

Modelllösung d)

(1) Man berechnet den Parameter für den Schnittpunkt der Geraden durch S_1 und S_2 mit E_{ABC}.

$$g_{S_1S_2}:\ \vec{x} = \vec{x}_{S_1} + t \cdot \overline{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -12 \\ -23 \\ 4 \end{pmatrix}\ (t \in IR)$$

Gleichsetzen mit der Parameterform von E_{ABC} liefert das LGS

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & -8 & 23 & 16 \\ 0 & -32 & -4 & -36 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-4) \\ \\ \end{array}$$

Mit der letzten Zeile –96t = –100 ist $t = \frac{25}{24} > 1$.

Da $t > 1$ ist, liegt der Schnittpunkt von S_1 aus gesehen hinter S_2.

Also liegen S_1 und S_2 auf der gleichen Seite der Ebene E_{ABC}.

Eine Einheit des Parameters t entspricht einer Abstandslänge $\left|S_1S_2\right|$ auf der Geraden $g_{S_1S_2}$. Anhand des Parameterwertes $t = \frac{25}{24} > 1$ für den Schnittpunkt der Geraden mit E_{ABC} kann geschlossen werden, dass S_2 näher an E_{ABC} ($\frac{1}{25}t$ auf der Geraden $g_{S_1S_2}$) als S_1 ($\frac{26}{25}t$ auf der Geraden $g_{S_1S_2}$) liegt.