Mathematik Abivorklausur Probe Wal 2011

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Aufgabenstellung:

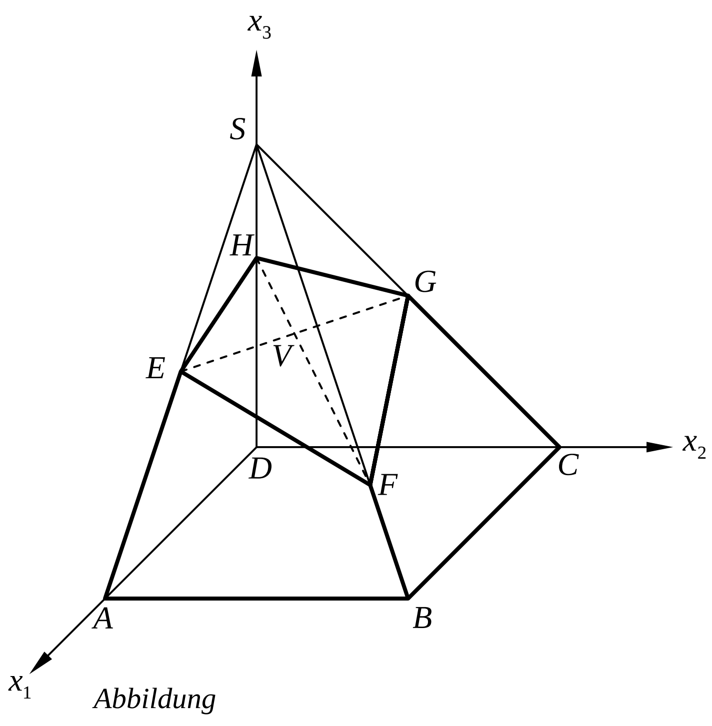
Ein Designer erhält von einer Süßwarenfirma den Auftrag, eine neue Schachtel für ihre Schokolinsen zu entwerfen.

Der Entwurf sieht vor, dass die Schachtel Teil einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist. Durch den Schnitt mit einer geeigneten Ebene entsteht als Schnittfläche die viereckige Deckfläche der Schachtel.

Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem hat die Grundfläche der Pyramide die Eckpunkte $A(8|0|0)$, $B(8|8|0)$, $C(0|8|0)$, $D(0|0|0)$, ihre Spitze ist der Punkt $S(0|0|8)$.

Die Schnittebene E_{EGH} wird festgelegt durch die Punkte $E(4|0|4)$, $G(0|4|4)$ und $H(0|0|5)$ (alle Angaben sind in cm).

Die Schachtel ist dann der Körper mit den Eckpunkten *A, B, C, D, E, F, G, H*.



Abbildung

Mathematik Abivorklausur Probe Wal 2011

a) (1) *Geben Sie Breite und Höhe der Schachtel an.*

(2) *Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene* E_{EGH} *an und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.*

[Zur Kontrolle: $E_{\text{EGH}}: x_1 + x_2 + 4 \ x_3 \quad 20$] $=$

(3) Das Viereck *EFGH* bildet die Deckfläche der Schachtel.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F.

[Zur Kontrolle: $F\left(6\,|\,6\,|\,2\right)$]

(4) *Prüfen Sie, ob die Deckfläche der Schachtel parallel zu ihrer Grundfläche ist.*

(18 Punkte)

b) Entlang der beiden Diagonalen der Deckfläche (Viereck *EFGH*) soll die Schachtel geöffnet werden können.

(1) *Zeigen Sie, dass die Diagonalen orthogonal sind.*

(2) *Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen und bestimmen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes V.*

(3) *Berechnen Sie den Flächeninhalt der Deckfläche.* (17 Punkte)

c) In einem zweiten Entwurf der Schachtel wird die Deckfläche und damit die Form der Schachtel folgendermaßen geändert: Die neue Deckfläche entsteht durch den Schnitt der bekannten Pyramide *ABCDS* mit der Ebene $E' : x_3 = 4$.

(1) *Weisen Sie nach, dass die neuen Punkte* $F'(4\,|\,4\,|\,4)$ *und* $H'(0\,|\,0\,|\,4)$ *sowie die schon bekannten Punkt*e *E und G Eckpunkte der neuen Deckfläche sind.*

(2) *Untersuchen Sie, welche Form die neue Deckfläche (Viereck EF'GH') hat.*

(3) *Ermitteln Sie mit Hilfe der Anschauung, welche Bedingungen eine Ebene erfüllen muss, damit durch den Schnitt dieser Ebene mit der Pyramide ABCDS eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht.* (15 Punkte)

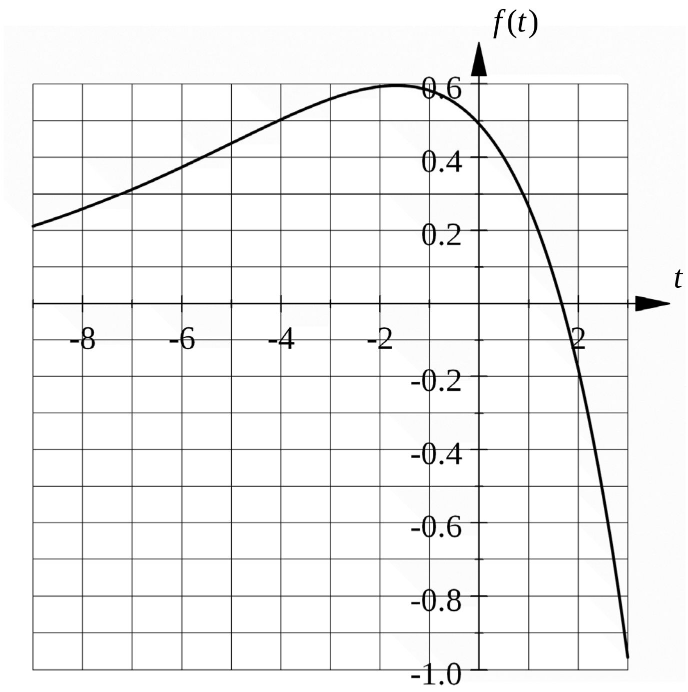
Mathematik Abivorklausur Probe Wal 2011

Aufgabenstellung:

In der Nacht vom 16. auf den 17. Februar 1962 gab es in Hamburg eine besonders starke Sturmflut. Die Anstiegsgeschwindigkeit des Hochwasserspiegels kann näherungsweise durch die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(t)=(-1{,}32t+2{,}2)\cdot e^{0{,}3t-1{,}5},\ t\in[-9;3],$$

beschrieben werden.
Dabei ist *t* die Zeit in Stunden, $f(t)$ wird in Metern pro Stunde gemessen. Die Zeit $t=0$ entspricht 0.00 Uhr des 17.02.1962.



[Hinweis: Es gilt: $f''(t)=(-0{,}1188\,t-0{,}594)\cdot e^{0{,}3t-1{,}5}$. Der Nachweis ist nicht erforderlich!]

Mathematik Abivorklausur Probe Wal 2011

a) *Zeigen Sie, dass das absolute Maximum von f bei* $t = -1\frac{2}{3}$ *angenommen wird, berechnen Sie seinen Wert und zeigen Sie außerdem, dass die Nullstelle von f bei* $t = 1\frac{2}{3}$ *liegt.*

(13 Punkte)

b) *Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von f im Sachzusammenhang unter Einbeziehung der Ergebnisse aus Teil a) mit Angabe von Uhrzeiten. Begründen Sie auch, warum das Modell für Zeiten nach 3.00 Uhr ungeeignet wird.* *(11 Punkte)*

c) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem sich die Anstiegsgeschwindigkeit am stärksten änderte.* (7 Punkte)

d) (1) *Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung* $F(t) = (-4{,}4\,t \quad 22)\; e^{0{,}3t-1{,}5}\cdot$ *eine Stammfunktion von f ist.*

(2) $F(t)$ gibt den Wasserstand (über dem sonst üblichen Wasserstandspegel) zum Zeitpunkt *t* an.

Bestimmen Sie den höchsten Wasserstand in Metern und stellen Sie einen Zusammenhang zu den Ergebnissen aus b) bzw. a) her. *(13 Punkte)*

e) *Interpretieren Sie den Ausdruck* $\frac{1}{-2-(-9)}\int_{-9}^{-2} f(t)\,dt$ *im Sachzusammenhang und berechnen Sie seinen Wert.* (6 Punkte)

Mathematik Abivorklausur Probe Wal 2011

Aufgabenstellung:

Über Maulwürfe sind die folgenden Informationen bekannt:

Maulwürfe pflanzen sich im Jahr nach der Geburt erstmals fort. Die meisten Arten pflanzen sich einmal pro Jahr fort, üblicherweise fällt die Geburt in die Frühlingsmonate. Die Lebenserwartung ist relativ gering und dürfte bei den wenigsten Tieren drei bis sechs Jahre übersteigen.

Bei der Modellierung der Entwicklung einer Population unterscheiden wir zwischen Jungtieren (im 1. Lebensjahr), ausgewachsenen Tieren (im 2. Lebensjahr) und Alttieren (im 3. Lebensjahr oder älter). Die Anzahlen dieser Tiere werden mit A_1 (Jungtiere), A_2 (ausgewachsene Tiere) und A_3 (Alttiere) bezeichnet. Die jährliche Veränderung einer Population kann durch die Multiplikation

$M_{\text{a,b,c}} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ mit einer Matrix $M_{\text{a,b,c}} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & c \end{pmatrix}$

mit $a, b, c \geq 0$ beschrieben werden. Dabei hängen *a*, *b* und *c* von den Lebensbedingungen der spezifischen Population ab.

a) *Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.*

Erklären Sie die biologische Bedeutung der Parameter a, b und c. (9 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie den Wert von a so, dass folgende Bedingung erfüllt ist:*

Für jedes ausgewachsene Tier, das im Laufe des Jahres stirbt, wird im gleichen Jahr ein Jungtier von einem ausgewachsenen Tier geboren.

(2) *Geben Sie an, durch welche Matrizen $M_{a,b,c}$ die Entwicklung von Populationen beschrieben wird, in denen Maulwürfe nicht älter als drei Jahre werden.*

(3) *Ermitteln Sie diejenigen Werte für b, für die eine Population mit $a = c = 0$ langfristig wächst.* (11 Punkte)

Mathematik Abivorklausur Probe Wal 2011

Für die folgenden Überlegungen wird eine Maulwurfart betrachtet, deren Entwicklung durch die Matrix

$$M_{\frac{2}{3},b,c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & b \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & c \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

c) *Prüfen Sie, ob es Werte für b und c gibt, so dass eine Anfangspopulation aus 270 Jungtieren, 135 ausgewachsenen Tieren und 50 Alttieren stabil bleibt (sich also die Anzahl der Jungtiere, der ausgewachsenen Tiere und der Alttiere von Jahr zu Jahr nicht verändert). Falls ja, bestimmen Sie b und c.* (7 Punkte)

d) Aufgrund verschlechterter Umweltbedingungen verändern sich die Übergangsraten in einem bestimmten Gebiet auf die Werte $b = \frac{1}{5}$ *und* $c = \frac{1}{10}$. Die Population in diesem Gebiet besteht anfangs aus 90 Jungtieren, 60 ausgewachsenen Tieren und 30 Alttieren.

Berechnen Sie die Population des folgenden Jahres.

Beurteilen Sie auf der Grundlage Ihres Ergebnisses, wie der Maulwurfbestand sich langfristig bei unveränderten Übergangsraten entwickeln würde. (6 Punkte)

e) *Zeigen Sie, dass es für* $b = \frac{1}{5}$ *und* $c = \frac{1}{10}$ *Ausgangspopulationen gibt, aus denen nach einem Jahr eine Population von 50 Jungtieren, 25 ausgewachsenen Tieren und 25 Alttieren entstehen kann, und geben Sie konkret zwei mögliche Ausgangspopulationen an.*

Untersuchen Sie, welche Zusammenhänge in einer Ausgangspopulation zwischen den Anzahlen der Maulwürfe in den drei Altersstufen bestehen, und bestimmen Sie die maximale Anzahl der Tiere jeder Altersstufe in einer Ausgangspopulation. (17 Punkte)