10 gemischte Aufgaben zur Vorbereitung der Vorabiturklausur 2.2010 WAL

1. Bilde die erste Ableitungfunktion folgender Funktionen:

   a) $f(x) = \cos(x\sin(\frac{1}{x}))$ b) $f(x) = \frac{1}{1+x^6}e^{\frac{1}{x^2}}$ c) $f(x) = \ln(\frac{e^{-x}+e^{x}}{-e^{-x}+e^{x}})$

2. Berechne das Integral $\int_0^2 te^{t^2}dt$ auf zwei verschiedene Arten.

3. Bestimme die Gleichung einer Geraden durch die Punkte P(1/1) und Q(2/-1)
   a) mit Hilfe der AG
   b) mit Hilfe der Analysis

4. Zeige: d(P;g)=2 mit P(3/4/0) und g mit $g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Zeige: $ABC = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. Ermittle alle Lösungen der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Bestimme: $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{x}{n})$

8. Zeige: In jedem Quader mit quadratischer Grundfläche sind die Raumdiagonale und eine der Diagonalen der Grundfläche orthogonal.

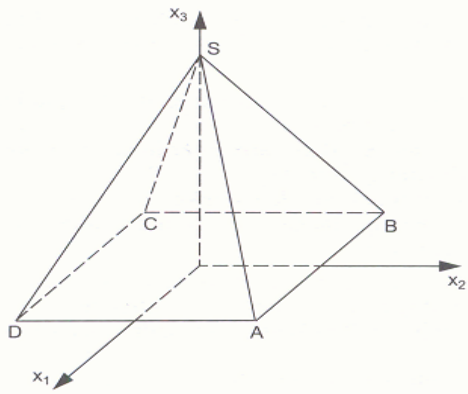
9. Welche Punkte der $x_3 - Achse$ haben von der Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ den Abstand 1 ?

10. Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3.Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Ihr Wendepunkt ist der Punkt W(1/2). Bestimme eine Funktionsgleichung.

Komplexere Aufgaben zur Vorbereitung der Vorabiturklausur 2.2010 WAL

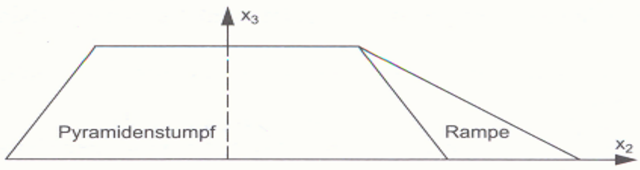
Aufgabe 1

Eine ägyptische Pyramide hat die Form einer senkrechten, quadratischen Pyramide. Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 144 m, die Höhe 90 m. Zur Vermessung wird ein kartesisches Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 m verwendet, dessen Ursprung in der Mitte der quadratischen Grundfläche liegt und dessen x_1- und x_2-Achse parallel zu den Grundkanten verlaufen. Die Bezeichnung der Punkte wird gemäß der nebenstehenden Skizze gewählt.



a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte A, B und S.
Wie groß ist der Neigungswinkel einer Seitenfläche zur Grundfläche?
(Teilergebnis: E_1: $5x_2 + 4x_3 = 360$)

b) Die Ägypter bauten die Pyramide schichtweise. Zum Transport der Steine zur jeweiligen Schicht wurde eine Rampe benötigt. Die zum Transport der Steine benötigte Rampenfläche ist rechteckig und liege nun in der Ebene E_2: $5x_2 + 26x_3 = 1\,350$.



Berechnen Sie die Höhe des bisher gebauten Pyramidenstumpfes.
Wie lang ist die zum Transport der Steine benötigte Rampenfläche?

c) Der Punkt Q ist der Schwerpunkt der Seitenfläche DAS. Senkrecht zu dieser Seitenfläche verläuft ein Schacht, dessen Mittelachse von Q ausgeht und in 14 m Höhe über der Grundfläche am Eingang des Königsgrabs endet.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Endpunktes.
Eine weitere Kammer wurde um denjenigen Punkt P gebaut, der von allen Seitenflächen und der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P auf eine Dezimale gerundet.

Aufgabe 2

Bevölkerungsentwicklung

Die Bevölkerung eines Landes mit 30 Millionen Bewohnern ist gleichmäßig in Männer, Frauen und Kinder aufgeteilt, wobei unter Kindern alle weiblichen und männlichen Bewohner verstanden werden, die noch nicht erwachsen sind, also auch Säuglinge und Jugendliche. Im beobachteten Zeitraum von einem Jahr erreichen jeweils 3 % der männlichen und weiblichen Jugendlichen das Erwachsenenalter. Im Durchschnitt bekommen 25 % der Frauen in diesem Jahr ein Kind. Die Sterblichkeit beträgt bei den Männern 15 % und bei den Frauen 10 %. Aus- und Einwanderung sowie Kindersterblichkeit und Geburten bei Minderjährigen sind so geringfügig, dass sie vernachlässigt werden können. Wie wird sich die Bevölkerung weiter entwickeln?

Wie ändert sich der Ansatz, wenn jährlich 0,2 % der Männer, 0,15 % der Frauen und 0,08 % der Kinder auswandern sowie 50 000 Männer, 74 000 Frauen und 60 000 Kinder einwandern?

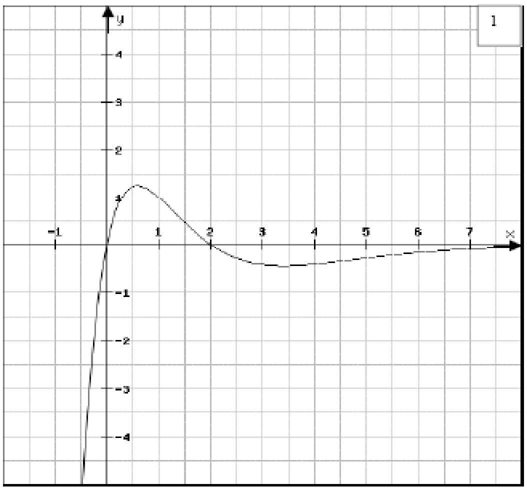
Aufgabe 3

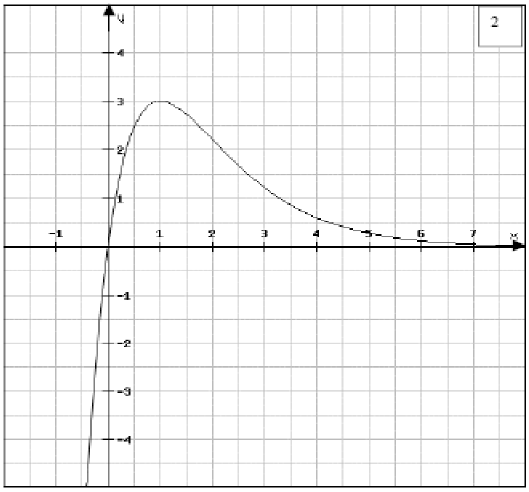
Für jede natürliche Zahl t sei eine Funktion f_t durch die Gleichung
$y = f_t(x) = x^{3-t} \cdot e^{t-x}$ gegeben.

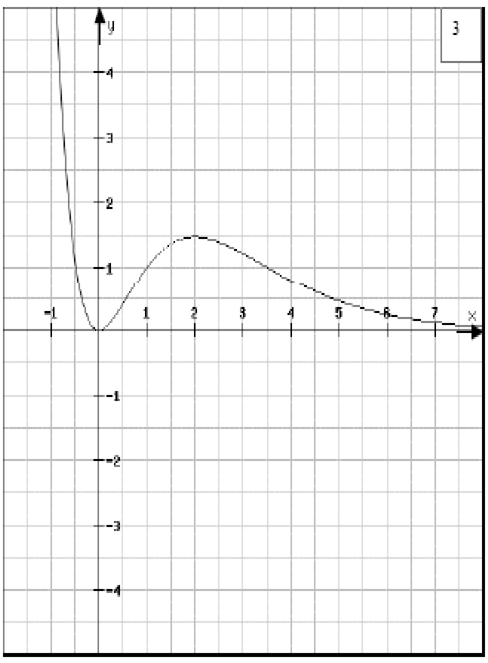
Für die Teilaufgaben a) bis e) sei $t = 1$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_1 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf lokale Extrempunkte!
Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f_1 an!

b) In den Koordinatensystemen 1, 2 und 3 sind die Graphen von f_1 und f_1' sowie einer weiteren Funktion dargestellt. Ordnen Sie den Funktionen f_1 und f_1' den richtigen Graphen zu!
Begründen Sie Ihre Entscheidungen!







c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Graphen von f_1 und f_1' im Punkt $S(x_s; f_1(x_s))$ mit $x_s > 0$!

d) Beweisen Sie, dass für die n-te Ableitung $(n \in N,\ n \geq 1)$ der Funktion f_1 die Gleichung
$f_1^{(n)}(x) = (-1)^n[x^2 - 2nx + n(n-1)]e^{1-x}$ gilt!

e) Für $n = -1$ liefert die Gleichung aus Teilaufgabe d) eine Stammfunktion von f_1.
Zeigen Sie, dass diese Aussage richtig ist!
Der Graph von f_1 und die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine nach rechts ins Unendliche reichende Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
(Hinweis: $\lim\limits_{x \to \infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$)

f) Geben Sie für $t = 3$ und für $t = 4$ den maximalen Definitionsbereich an!
Untersuchen Sie die Funktionen f_3 und f_4 auf senkrechte Asymptoten!
Für welche Werte von t besitzt die Funktion f_t keine negativen Funktionswerte?
Zeigen Sie, dass der Punkt $P(e; f_t(e))$ gemeinsamer Punkt aller Graphen der Funktionen f_t ist!

g) Die Punkte $O(0;0)$, $Q(r;0)$ und $R(r; f_t(r))$ mit $r > 0$ und $0 \leq t \leq 3$ bilden ein Dreieck.
Bestimmen Sie den Wert von r in Abhängigkeit von t, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird!
(Auf den Nachweis für das Maximum wird verzichtet.)
Geben Sie den ganzzahligen Wert von t an, so dass der maximale Flächeninhalt ganzzahlig wird!

Viel Erfolg !

Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.
Carl Friedrich Gauß