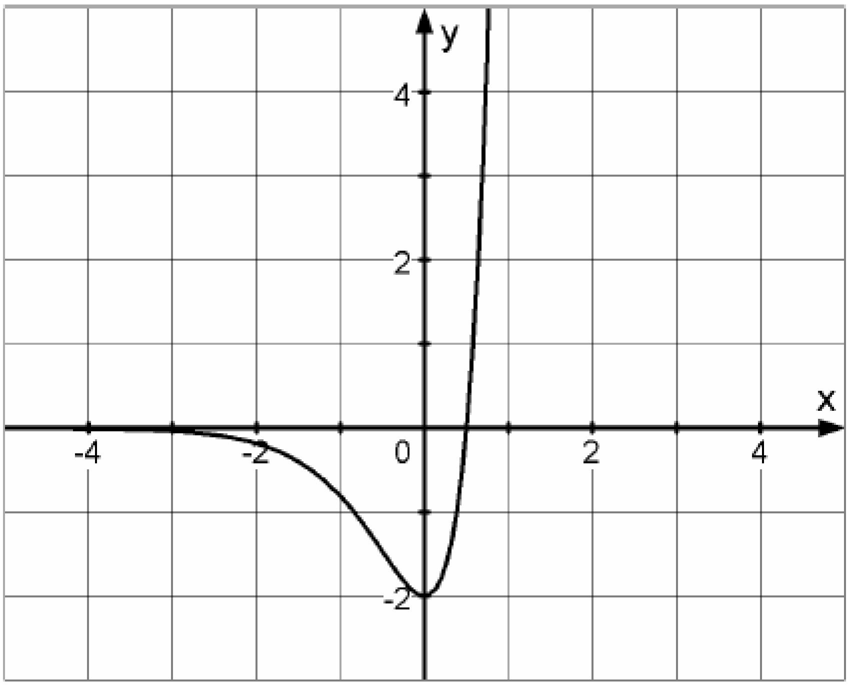
Probeklausur für die Abivorklausur 2009 WAL

Aufgabe 1 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der Funktion $g: x \mapsto (4x-2)\cdot e^{2x}$ mit dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$.



1. a) Berechnen Sie die Nullstelle von g.
   G_g besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich).
   Berechnen Sie dessen Koordinaten. [Zur Kontrolle: $g'(x) = 8xe^{2x}$]

   b) Weisen Sie nach, dass G_g genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w. Tragen Sie diese in obige Abbildung ein. [Zur Kontrolle: $w: y = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$]

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h: x \mapsto (-4x-2)\cdot e^{-2x}$ mit Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}$ und zugehörigem Graph G_h.

2. a) Begründen Sie anhand der Funktionsterme von g und h, dass man G_h erhält, indem man G_g an der y-Achse spiegelt. Zeichnen Sie G_h in die Abbildung ein.
   Geben Sie die Gleichung der Wendetangente von G_h an.

   b) Die Funktion $G: x \mapsto (2x-2)\cdot e^{2x}$ mit $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). Die Schnittpunkte der Graphen G_g bzw. G_h mit der x-Achse werden mit N bzw. M bezeichnet.
   Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von der Strecke [MN] sowie den Graphen G_g und G_h eingeschlossen wird.
   (Hinweis: G_g und G_h schneiden sich nur auf der y-Achse.)

Aufgabe 2 Lineare Algebra und Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $P(-8\,|\,-4\,|\,1)$ und $Q(7\,|\,8\,|\,17)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie den Geradenpunkt R zum Parameterwert $\lambda = 30$ und zeigen Sie, dass Q nicht auf der Geraden g liegt.

   b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt Q und die Gerade g enthält, in Normalenform. Welche besondere Lage hat diese Ebene im Koordinatensystem?

   [mögliches Teilergebnis: $E: 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0$]

   c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(7\,|\,-4\,|\,1)$ Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade g ist. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes Q von der Geraden g. [Ergebnis: $d = 20$]

   d) Der Punkt Q' entsteht durch Spiegelung des Punktes Q an der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q'.

   [Ergebnis: $Q'(7\,|\,-16\,|\,-15)$]

   e) Begründen Sie, dass das Viereck $QPQ'R$ eine Raute ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, die die gegenseitige Lage der Geraden g und der Punkte Q, P, Q', R und F veranschaulicht. Wählen Sie hierfür die Ebene E als Zeichenebene.

   f) Berechnen Sie alle Innenwinkel der Raute und den Abstand h paralleler Rautenseiten. [Teilergebnis: $h = 24$]

Aufgabe 3 Lineare Algebra und Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,0)$, $B(3\,|\,0\,|\,2)$ und $C(5\,|\,5\,|\,2)$ ein Dreieck in einer Ebene E fest. Die Gerade g enthält den Punkt B und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und berechnen Sie alle Innenwinkel dieses Dreiecks.

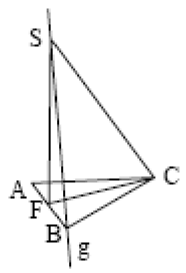
   b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(2\,|\,1\,|\,1)$ Mittelpunkt der Strecke [AB] ist, und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform, bezüglich der die Punkte A und B zueinander symmetrisch sind.

   [mögliches Ergebnis: $G: x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$]

   c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene G.

   [Ergebnis: $S(-3\,|\,3\,|\,8)$]

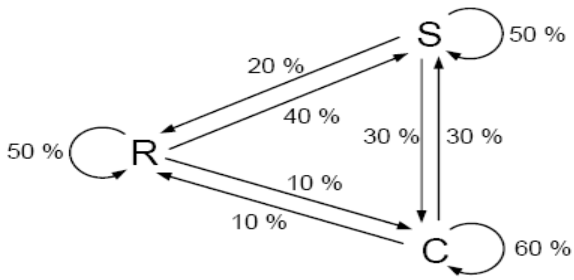
   d) Bestätigen Sie, dass die Gerade FS senkrecht auf der Ebene E steht, und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt F auf dem Kreis in der Ebene G mit Durchmesser [SC] liegt.



Aufgabe 4 Matrizen

Aufgabenstellung:

Die tägliche Wettervorhersage hat einen festen Platz auch in der lokalen Presse und im lokalen Rundfunk. Lokale Wetterbeobachtungen (täglich um 0:00, 6:00, 12:00 und 18:00) über einen langen Zeitraum liefern das statistische Material, aus dem entnommen werden kann, wie sich das gegenwärtige Wetter voraussichtlich in den nächsten Tagen entwickeln wird.
Aus solchen Beobachtungen wurde das folgende vereinfachte **Modell** entwickelt. Es unterscheidet lediglich drei Zustände: **R**egen, **S**tratus (tiefhängende Schichtwolken) und **C**umulus (alle Zustände, die nicht zu Regen und Stratus gehören).
Die Übergänge vom gegenwärtigen Wetterzustand zum Wetter im 6-Stunden-Takt wurden in dem nebenstehenden Übergangsgraphen zusammengestellt. Liegt gegenwärtig z. B. der Zustand **S**tratus vor, so hat man nach 6 Stunden in 30 % aller Fälle den Zustand **C**umulus und in 20 % aller Fälle den Zustand **R**egen.



a) Die Informationen des Übergangsgraphen können auch mit Hilfe des Produktes

$\vec{x}_1 = W \cdot \vec{x}_0$ mit der Übergangsmatrix $W = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ und dem Startvektor

$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_R \\ x_S \\ x_C \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Ermitteln Sie, welche Wettervorhersagen die lokalen Sender für 12:00 und für 18:00 treffen, wenn es morgens um 6:00 regnet.
Geben Sie alle Startvektoren $\vec{x}_0$ an, die in diesem Modell sinnvoll sind. Beschreiben Sie die Bedeutung der Vektoren $\vec{x}_n = W^n \cdot \vec{x}_0$, $n \in IN$, im Kontext. (13 Punkte)

b) *Berechnen Sie die Matrix W^2.*
Beschreiben Sie die Bedeutung des Elements in der zweiten Zeile und der ersten Spalte der Matrix W^2.
Begründen Sie aus dem Kontext, warum die Spaltensumme in den Matrizen W^n, $n \in IN$, immer 1 ergeben muss. (10 Punkte)

c) *Es gilt:*

$W^4 = \begin{pmatrix} 0,254 & 0,234 & 0,221 \\ 0,412 & 0,405 & 0,399 \\ 0,335 & 0,361 & 0,380 \end{pmatrix}$, $W^6 = \begin{pmatrix} 0,238 & 0,234 & 0,232 \\ 0,406 & 0,404 & 0,403 \\ 0,356 & 0,362 & 0,365 \end{pmatrix}$, $W^{12} = \begin{pmatrix} 0,234 & 0,234 & 0,234 \\ 0,404 & 0,404 & 0,404 \\ 0,362 & 0,362 & 0,362 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie für jeden der drei möglichen Anfangszustände $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Wetterprognosen für den vierten nachfolgenden Tag und die weiteren Tage und interpretieren Sie das Ergebnis.
Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl der Stunden pro Jahr, in denen der Zustand Regen herrscht. (18 Punkte)

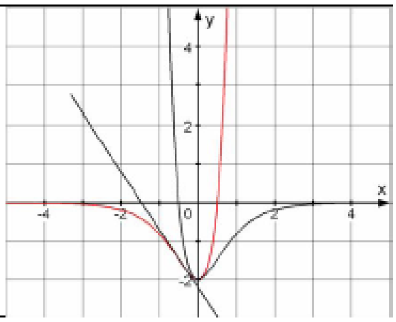
d) *Interpretieren die Gleichung (*)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *im Kontext.* (3 Punkte)

e) *Beurteilen Sie mit Hilfe der Angaben in den Teilaufgaben c) und d) die Qualität des beschriebenen mathematischen Modells.* (6 Punkte)

[Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass die Gleichung (*) aus Teilaufgabe d) die Lösung $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat.]

Lösungen

Aufgabe 1 Analysis

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	5	Nullstelle: $x = \frac{1}{2}$; TP$(0\,\|\,-2)$
b)	9	$g''(x) = 8(1+2x)e^{2x}$
2. a)	6	Wendetangente von G_h: $y = \frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$ 
b)	5	$A = \left\|2 \cdot \int_0^{0,5} g(x)dx\right\| = 2e - 4$

Aufgabe 2 Lineare Algebra & Analytische Geometrie

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	2	$R(22\,\|\,-4\,\|\,1)$
b)	6	E ist parallel zur x_1-Achse.
c)	6	z. B.: $\overrightarrow{FQ} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $F \in g$
d)	2	-----
e)	9	z. B.: $\overrightarrow{PR} = 2 \cdot \overrightarrow{PF}$ und Q' ist Spiegelpunkt von Q bzgl. der Geraden PR $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{FQ}\| \cdot \|\overrightarrow{PF}\| = 2 \cdot 20 \cdot 15 = 600$
f)	8	$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{QF}}{\overline{PF}} = \frac{20}{15} \Rightarrow \varphi = \varphi' \approx 106{,}3°$; $\psi = \psi' \approx 73{,}7°$ z. B.: $\|\overrightarrow{RQ}\| \cdot h = A \Rightarrow h = \frac{600}{25} = 24$

Aufgabe 3 Lineare Algebra & Analytische Geometrie

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	7	$\overline{AC} = \overline{BC}$; $\gamma \approx 38°$; $\alpha = \beta \approx 71°$
b)	5	-----
c)	4	-----
d)	6	F liegt auf dem Thaleskreis über [SC], da $\measuredangle\, CFS = 90°$.

Aufgabe 4 Matrizen

Modelllösung a)

Regen kann durch den Startvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dargestellt werden.

$$\vec{x}_1 = W \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix}0,5\\0,4\\0,1\end{pmatrix}, \vec{x}_2 = W \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}0,34\\0,43\\0,23\end{pmatrix}$$

Um 12:00 wird es in 50 % aller Fälle regnen, in 40 % wird es den Zustand Stratus, in 10 % den Zustand Cumulus geben.
Um 18:00 wird es in 34 % aller Fälle regnen, in 43 % wird es den Zustand Stratus, in 23 % den Zustand Cumulus geben.

Es gibt die Startvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$: Regen, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$: Stratus, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: Cumulus.

Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$, allgemein $\vec{x}_n$ geben jeweils die Verteilung der drei Wetterzustände nach einfachem, zweifachem, (allgemein) n-fachem 6-stündigen Zeitintervall wieder.

Modelllösung b)

$$W^2 = \begin{pmatrix}0,34 & 0,23 & 0,17\\0,43 & 0,42 & 0,37\\0,23 & 0,35 & 0,46\end{pmatrix}$$

Das Element 0,43 gibt an, dass in 43 von 100 Fällen nach 12 Stunden der Zustand Stratus herrscht, wenn es zu Beginn regnet.
Die Spalten geben die Verteilung der Wetterzustände nach $n{\cdot}6$ Stunden an. Diese Anteile müssen sich zu 1 ergänzen, weil es keine anderen Zustände gibt.

Modelllösung c)

$$W^{12} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = W^{12} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = W^{12} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,234\\0,404\\0,362\end{pmatrix}$$

Für $n = 12 + k,\ k \in IN$, gilt:

$$\vec{x}_n = W^{12+k} \cdot \vec{x}_0 = W^{12} \cdot W^k \cdot \vec{x}_0 = W^{12} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \approx (a+b+c) \cdot \begin{pmatrix}0,234\\0,404\\0,362\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,234\\0,404\\0,362\end{pmatrix}.$$

Der Prüfling soll in der Fachsprache begründen, dass die Zustandsverteilung nach dem 3. Tag stationär wird.
Da es durchschnittlich in 234 von 1000 sechsstündigen Zeiträumen regnet, herrscht der Zustand Regen in $\frac{234}{1000} \cdot 365 \cdot 24\ h \approx 2050\ h$.

Modelllösung d)

Es wird danach gefragt, wie das Wetter vor 6 Stunden gewesen sein könnte, wenn es im Augenblick gerade regnet.

Modelllösung e)

Die Matrix W^4 zeigt, dass die Zustandsverteilung bereits nach einem Tag kaum noch vom Startzustand abhängt. Es gibt nur Abweichungen von maximal 5 %. Für eine Voraussage von mehr als einem Tag ist das Modell in keiner Weise geeignet.

Die Lösung $\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ hat innerhalb des Modells keinen Sinn (negative Komponente, erste Komponente >1). Die Lösung ist also keine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das bedeutet auch, dass innerhalb des Modells die sichere Voraussage Regen nicht möglich ist.
Innerhalb des Modells kann also nur kurzfristig im Sinne einer Wetterprognose geschlossen werden.