Lösungen unvollständig und ohne Gewähr !

Thema: Produktregel; Quotientenregel; Funktionsuntersuchungen; Funktionen in Anwendungen

Hilfsmittel: Zirkel, Lineal, Schreibwerkzeug, nicht programmierbarer TR

Aufgabe 1

Berechne $f'(x)$! $x \in \Re; k \in \Re$.

a) $f(x) = \sqrt{x} + k \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{\sin(2x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{5}(\sin(2x))^{-\frac{4}{5}} \cdot \cos(2x) \cdot 2$

d) $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{1}{x})} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2}(\sin(\frac{1}{x}))^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot (-x^{-2})$

f) $f(x) = \frac{x}{(k-x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1(k-x)^2 - x \cdot 2(k-x)^1(-1)}{(k-x)^4}$

g) $f(x) = (\sin(x))^3 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 3(\sin(x))^2 \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{x}{x+1})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1(x+1) - 1x}{(x+1)^2}$

i) $f(k) = x^2(k-1) \qquad \Rightarrow \qquad f'(k) = x^2$

j) $f(x) = kx^k - kx \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = k^2 x^{k-1} - k$

Aufgabe 2

Beweise die Produktregel ! Siehe LS S.22 unten !

Aufgabe 3

Begründe: Die Funktion f mit $f(x) = g(x^2)$ hat die Ableitung $f'(x) = 2x \cdot g'(x^2)$. Die Kettenregel liefert die Begründung: Wenn $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ mit $h(x) = x^2$. Leite entsprechend ab:

a) $f(x) = g(3x) \qquad \Rightarrow f'(x) = 3g'(3x)$

b) $f(x) = g(1-x) \qquad \Rightarrow f'(x) = -g'(1-x)$

c) $f(x) = g(\frac{1}{x}) \qquad \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}g'(\frac{1}{x})$

Aufgabe 4

Aufgabenstellung:

Zu Beginn des Monats März 2006 prognostizierten zwei Wirtschaftsforschungsinstitute den Absatz eines Produkts im Laufe der nächsten 12 Monate.

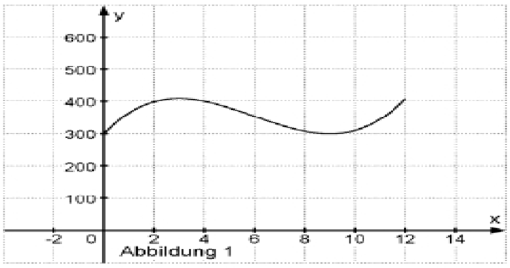


Abbildung 1

Das **erste** Institut geht von einem saisonabhängigen Absatz aus und legt folgende Funktion f zugrunde:

$f(x) = x^3 - 18x^2 + 81x + 300$, mit $0 \leq x \leq 12$.

Hierbei steht x für die Zeit in Monaten nach Beobachtungsbeginn und $f(x)$ für den Absatz in einer bestimmten Zeiteinheit.

Das **zweite** Institut geht von einer gleichmäßigen Steigerung (linearen Entwicklung) des Absatzes aus. Die Prognosen beider Institute stimmen zu Beginn und Ende des Prognosezeitraums überein.

a) *Berechnen Sie den Funktionsterm g(x) der vom zweiten Institut zugrunde gelegten Funktion g. Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen in dem Koordinatensystem in Abbildung 1.* (5 P)

(Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $g(x) = 9x + 300$)

b) *Berechnen Sie den Zeitraum, in dem der Absatz nach der Prognose des ersten Instituts abnimmt.* (9 P)

c) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem sich das Absatzverhalten laut Prognose des ersten Instituts im zweiten Halbjahr 2006 am stärksten verändert.* (11 P)

d) *Untersuchen Sie, an welchen Zeitpunkten der Unterschied zwischen den von den beiden Instituten prognostizierten Absatzwerten am größten ist.*
Begründen Sie, dass genau dann die Absatzprognosen beider Institute gleiche Zuwachsraten aufweisen. (14 P)

e) *Vergleichen Sie für beide Prognosen den zu erwartenden Absatz im betrachteten Jahr.* (11 P)

a	Der Graph von g geht durch die Punkte $(0 \mid f(0)) = (0 \mid 300)$ und $(12 \mid f(12)) = (12 \mid 408)$. Die Funktion g ist linear mit $g(x) = \frac{408-300}{12-0}(x-0)+300 = 9x+300$ Die Skizze wird um den Graphen von g(x) (Verbindungsstrecke der genannten Punkte) ergänzt.
b	Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f über dem Intervall I streng monoton fallend. Es gilt: $f'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 9$. Wegen z.B. $f'(4) = -15$ ist (die quadratische Funktion) f' für $3 < x < 9$ negativ, die Funktion f dort also fallend. (Eine Argumentation über Hoch- und Tiefpunkt oder über Ungleichungsumformungen ist auch möglich.) Der Absatz nimmt in den Monaten Juni bis November 2006 einschließlich ab.
c	Dem zweiten Halbjahr 2006 entspricht das Intervall [4;10], da die Beobachtung Anfang März beginnt. Die größte Veränderung findet im Innern oder an den Rändern des Intervalls statt. Wenn die Ableitung f' im Innern des Intervalls eine Extremstelle hat, dann ist diese eine Wendestelle der Funktion f. Zur Ermittlung der stärksten Veränderung des Graphen wird also die Funktion f auf Wendestellen untersucht. Wegen $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ und $f'''(6) = 6 < 0$ ist $x = 6$ Wendestelle von f mit $f'(6) = -27$. An den Rändern gilt $f'(4) = -15$ bzw. $f'(10) = +21$. Der gesuchte Zeitpunkt größter Veränderung ist also tatsächlich $x = 6$ d.h. Anfang September.
d	Die Differenzfunktion $d = f - g$ mit $d(x) = x^3 - 18x^2 + 72x,\ 0 \le x \le 12$, muss ein Extremum besitzen. Wegen $d'(x) = 3x^2 - 36x + 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \pm 2\sqrt{3}$ und $d''(x) = 6x - 36$ mit $d''(6 \pm 2\sqrt{3}) = \pm 12\sqrt{3}$ treten nach $6 - 2\sqrt{3} \approx 2{,}5$ bzw. $6 + 2\sqrt{3} \approx 9{,}5$ Monaten, also Mitte Mai bzw. Mitte Dezember die größten Differenzen zwischen den Prognosen der beiden Institute auf. Die Steigung beider Graphen muss zur Zeit größten Abstands gleich sein, nämlich gleich 9. Der Ansatz mit gleichen Zuwachsraten (Steigungen) $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 81 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 24 = 0$ führt auf dieselbe Bedingung wie oben. (Äquivalente Bedingung)

e) Nicht zu behandeln (Integralrechnung bis zu diesem Zeitpunkt nicht behandelt im Unterricht)

e	Es gilt: $\int_0^{12}(x^3 - 18x^2 + 81x + 300)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 6x^3 + \frac{81}{2}x^2 + 300x\right]_0^{12} = 4248$ und $\frac{1}{2}(300+408)\cdot 12 = 4248$. Beide Flächeninhalte stimmen also überein. Um den Absatz selbst zu ermitteln, müsste man den Wert 4248 noch mit der Anzahl der in der Aufgabenstellung erwähnten Zeiteinheiten pro Monat multiplizieren. Dieser für beide Prognosen gleiche Faktor ändert nichts an der Tatsache, dass der zu erwartende Jahresabsatz beide Mal der gleiche ist.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktionenschar mit der Funktionsgleichung:

$f_a(x) = x^3 - ax^2 - 3x^2 + 3ax$

a) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion der Schar durch. Zeichnen Sie einzelne charakteristische Graphen. Für welche Werte von a liegt eine besondere Situation vor ? Charakterisieren Sie die Schar insgesamt.

I $D(f) = \Re; W(f) = \Re$

II Symmetrie:

Nur im Falle a=-3 liegt Punktsymmetrie vor, sonst ist keine Standardsymmetrie erkennbar.

III Verhalten für $x \to \infty$

$$x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$$
$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$$

IV Nullstellen

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - ax^2 - 3x^2 + 3ax = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^2 - ax - 3x + 3a) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - (a+3)x + 3a = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a+3}{2} \pm \sqrt{(\frac{a+3}{2})^2 - 3a}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a+3}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2+6a+9}{4}) - 3a}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{a+3}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3}{2}a + \frac{9}{4}}$$

V Extremstellen

F ist differenzierbar auf ganz $\Re$ und es gilt:

$$f(x) = x^3 - ax^2 - 3x^2 + 3ax$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax - 6x + 3a$$
$$\Rightarrow f''(x) = 6x - 2a - 6$$
$$\Rightarrow f'''(x) = 6$$

Mögliche Extremstellen liegen dort, wo die Steigung o ist, also $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2ax - 6x + 3a = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - (\frac{2}{3}a + 2)x + a = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{-(\frac{2}{3}a+2)}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{3}a+1)^2 - a}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a + 1 \pm \sqrt{(\frac{1}{3}a+1)^2 - a}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a + 1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{3}a + 1 - a}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a + 1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}a + 1}$$
$$f''(\frac{1}{3}a + 1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}a + 1}) = 6(\frac{1}{3}a + 1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}a + 1}) - 2a - 6$$

$= \pm 6\sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}a + 1} \neq 0 \forall a \in \Re$ (ungleich 0 für alle a Element der reellen Zahlen)

Jeder Graph der Funktionenschar hat also immer einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt.

Mögliche Wendepunkte

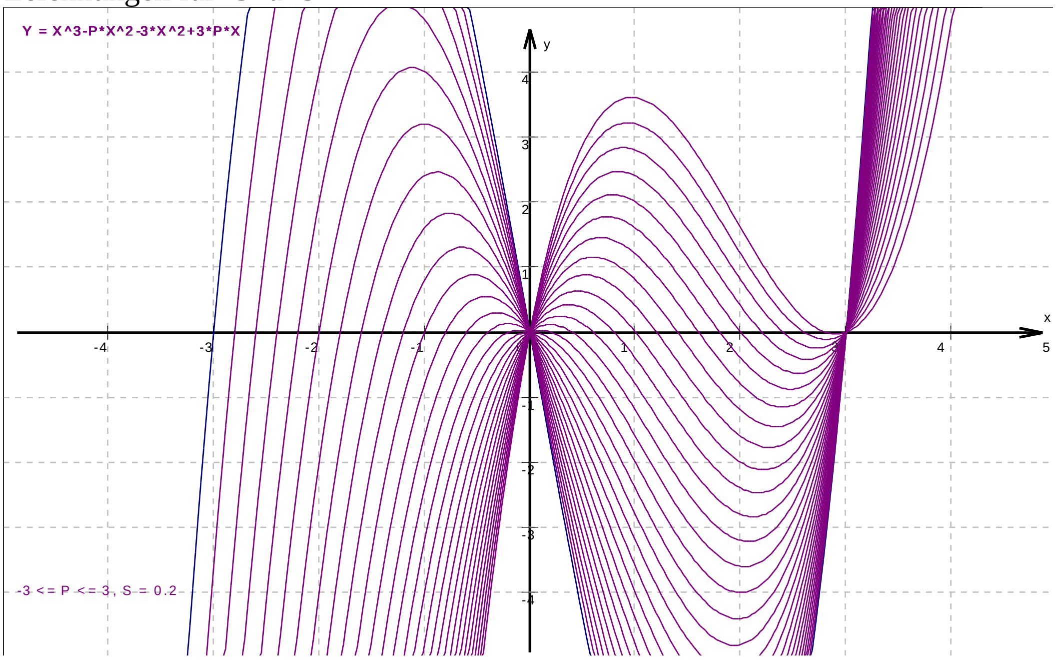
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a + 1$$

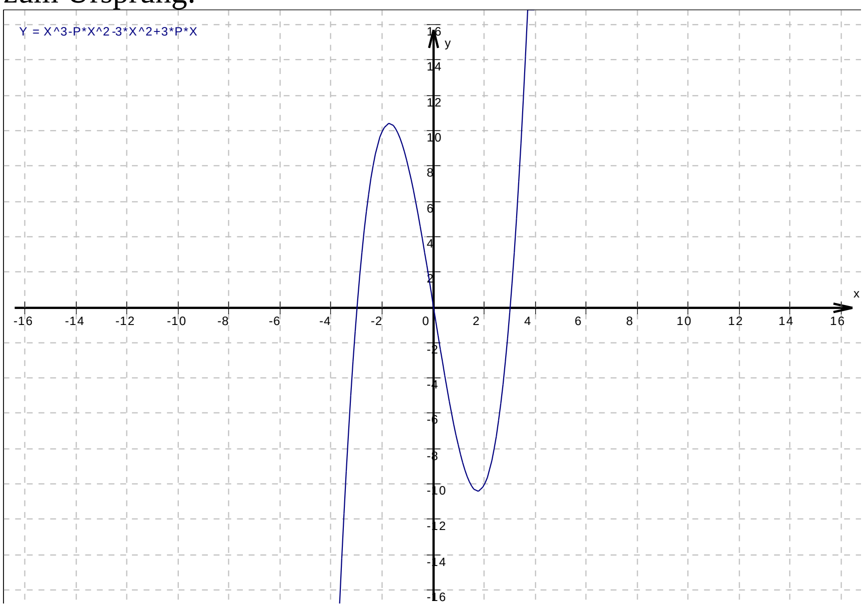
$$f'''(\frac{1}{3}a + 1) = 6 \neq 0$$

Wegen $f''(\frac{1}{3}a + 1) = 0 \wedge f'''(\frac{1}{3}a + 1) \neq 0 \Rightarrow \text{WP}((\frac{1}{3}a + 1 / f(\frac{1}{3} + 1))$

Zeichnungen für -3<a<3



Man erkennt deutlich, dass unabhängig von a die Nullstellen aller Funktionen bei x=0 und bei x=3 liegen. Die dritte Nullstelle ist abhängig von a.(Für a=3 gibt es nur 2 NS)
A beeinflusst die Lage der Extremstellen und die Lage des Wendepunktes.
Besonderheit für a=-3 liegt der WP im Ursprung und der Graph verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung:



Aufgabe 5*

Bilde die ersten vier Ableitungen der Funktion f! Versuche aus den Ergebnissen eine Formel für die n-te Ableitung $f^n(x)$ zu erraten !

Um eine Formel für die n-te Ableitung zu ermitteln, schaut man sich zunächst die ersten 3 Ableitungen an:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$

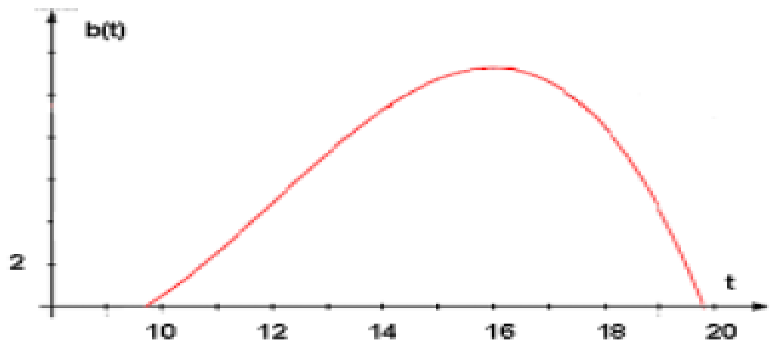
Offensichtlich gilt $f^n(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-1-n}$ mit n! = n(n-1)(n-2)........(n-k) (siehe Formelsammlung !!!)

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ wird genauso gelöst.

Aufgabe 6

Die untere Grafik gibt vereinfacht die Anzahl b der Besucher (gemessen in 1000 Personen) in einem Freizeitpark von 10.00 Uhr bis 19.30 Uhr an.

$10 < t \leq 19{,}5$



Stelle einen Funktionsterm 3.Grades auf (Zusatzinformationen: Um 10.00Uhr sind bereits 500 Besucher anwesend, zur Mittagszeit um 12 Uhr sind 4900 Besucher anwesend, um 13Uhr 7250 und um 18Uhr 8500), der den Besucherstrom beschreibt.

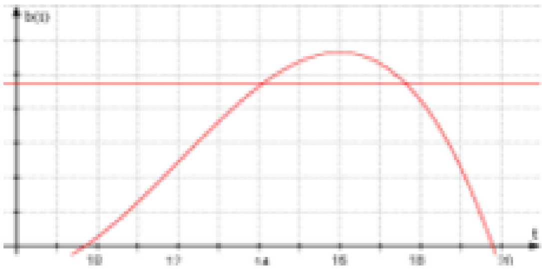
a) Berechne mit Hilfe aus a die Anzahl der Besucher, die an einem Tag nach einer Stunde im Park sind. (Falls aus a kein Ergebnis ermittelt werden konnte, rechne mit $f(x) = -0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 62{,}5$

b) Wann ist die Zahl der Besucher maximal ? Wie viele sind es ?

c) Wann ist der Andrang an den Kassen am größten ? Berechne und begründe im Sachzusammenhang.

d)

Erfahrungsgemäß ist an den Imbissstuben im Park mit erhöhtem Andrang zu rechnen, wenn mindestens 9500 Besucher im Park sind. Für den Direktor besteht dann die Notwendigkeit, zusätzliches Personal bereit zu stellen. Der Zeitraum, für den dies erforderlich ist, soll näherungsweise, z.B. zeichnerisch ermittelt werden.

a)	Gesucht ist $b(11)$. Es ist $b(11) = -0{,}05 \cdot 11^3 + 1{,}8 \cdot 11^2 - 19{,}2 \cdot 11 + 62{,}5 = 2{,}55$. Damit sind 2550 Besucher gegen 11 Uhr im Park.
b)	Gesucht ist das lokale Maximum der Funktion b. Es ist $b'(t) = -0{,}15t^2 + 3{,}6t - 19{,}2$. Aus $b'(t) = 0$ (notwendige Bedingung) folgt: $-0{,}15t^2 + 3{,}6t - 19{,}2 = 0 \Leftrightarrow t = 16 \vee t = 8$, wobei $t = 8$ nicht im Definitionsbereich von b liegt. Es ist $b''(t) = -0{,}3t + 3{,}6$. Weil $b''(16) = -1{,}2 < 0$ und $b'(16) = 0$, liegt bei $t = 16$ tatsächlich eine lokales Maximum vor. Es ist $b(16) = 11{,}3$, damit ist um 16.00 Uhr die größte Anzahl der Besucher im Park, nämlich 11300.
c)	Der Andrang an den Kassen ist dann am größten, wenn das Wachstum der Besucherfunktion und damit ihre Steigung ein lokales Maximum hat. Damit muss $b'(t)$ maximal sein, also ist die Wendestelle der Funktion b gesucht. Aus $b''(t) = 0$ (notwendige Bedingung) folgt: t=12. Weil zusätzlich $b'''(t) = -0{,}3 \neq 0$ für alle t, ist $t = 12$ tatsächlich Maximumstelle von b', also Wendestelle von b. Hieraus ergibt sich, dass um 12.00 Uhr der Andrang an den Kassen am größten ist.
d)	Hier geht es um die Frage, in welchem Zeitraum 9500 Personen oder mehr im Park sind. Für die Funktion bedeutet dies, dass man untersuchen muss, in welchem Intervall $b(t) \geq 9{,}5$ ist bzw. $b(t) = 9{,}5$. Dies führt zu der Gleichung: $-0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 62{,}5 = 9{,}5$ $\Leftrightarrow -0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 53 = 0$, die numerisch oder graphisch gelöst werden kann. Aus der Zeichnung liest man ab:  $t \approx 14{,}1 \vee t \approx 17{,}6$. Damit muss zwischen ca. 14.06 Uhr und 17.36 Uhr zusätzliches Personal bereit gestellt werden. Man wird etwa die Zeit zwischen 14.00 Uhr und 17.30 Uhr nehmen. Denkbar sind folgende Lösungsvorschläge: • Einzeichnen der Parallelen zur x- Achse im geeigneten Abstand; Kennzeichnung des entsprechenden Zeitintervalls; Abschätzung aufgrund der Zeichnung ergibt einen Zeitraum von etwa 14 Uhr bis 17.30 Uhr. • Systematisches Probieren ausgehend von dem bekannten Wert für t=16 und / oder Zuhilfenahme der Zeichnung .