Probeklausur 3 LK Mathematik Stufe 12 Zeitdauer: 135 Minuten WAL 25.02.2009

Gruppe A

Thema: Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Integralrechnung, Aufgaben in Sachzusammenhängen

Hilfsmittel: Zirkel, Lineal, Schreibwerkzeug, nicht programmierbarer TR

Aufgabe 1 Warm up !

a) Löse die Gleichung $y = b \cdot a^x$ nach b, a und x auf.
b) Bestimme b und a, wenn die zugehörige Exponentialfunktion durch die Punkte P(5/24) und Q(8/3) verlaufen soll.
c) Bestimme die Umkehrfunktion zu der Exponentialfunktion aus Aufgabenteil b.
d) Zeichne beide Funktionen in ein Koordinatensystem und beschreibe, wie sich die erste Winkelhalbierende zu den Funktionen aus Aufgabenteil b und c verhält.
e) Vereinfache: $\log_a(a), \log_1(a), \log_a(\frac{1}{a}), \log_a(a^n), 10^{\lg(x+1)}$
f) Löse nach x auf : $\int_1^2 t^4 dt = \frac{1}{2}\int_x^4 1 dt$

Aufgabe 2 Wachstumsfunktionen

Von einer bestimmten Substanz weiß man folgendes: Zum Zeitpunkt t = 1 liegen 10mg vor und zum Zeitpunkt t= 4 liegen 20mg vor.
Ermittle eine Gleichung einer Funktion, die die Menge der Substanz beschreibt, wenn man
a) lineares Wachstum zugrunde legt
b) quadratisches Wachstum zugrunde legt
c) exponentielles Wachstum zugrunde legt

Aufgabe 3 Integralrechnung und Funktionsuntersuchung

Für jedes $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$.
Ihr Graph sei K_t.
a) Untersuchen Sie K_t und zeichnen Sie den Graphen von K_3.
b) Eine Parabel zweiter Ordnung P_t geht durch die Punkte von K_t mit der x-Achse und berührt K_t im Ursprung. Bestimmen Sie eine Gleichung von P_t und weisen Sie nach, dass K_t und P_t keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.
c) K_t teilt die von P_t und der x-Achse eingeschlossene Fläche. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Teilflächen?

Aufgabe 4 Anwendung

Zur Restauration von Oldtimerfahrzeugen sind häufig Nachfertigungen von verrosteten Karosserieteilen notwendig. Aus zwei rechteckigen Reparaturblechen von 40 cm Breite und 55 cm Höhe sollen drei unterschiedliche Teile mit Hilfe eines Lasers, der über Funktionsvorschriften gesteuert werden kann, herausgeschnitten werden. Die *Abbildungen 1* und *2* zeigen jeweils einen Teil des Schneidetisches, das mit dem Schneidetisch verbundene Koordinatensystem und die zu erstellenden Blechteile A, B und C.

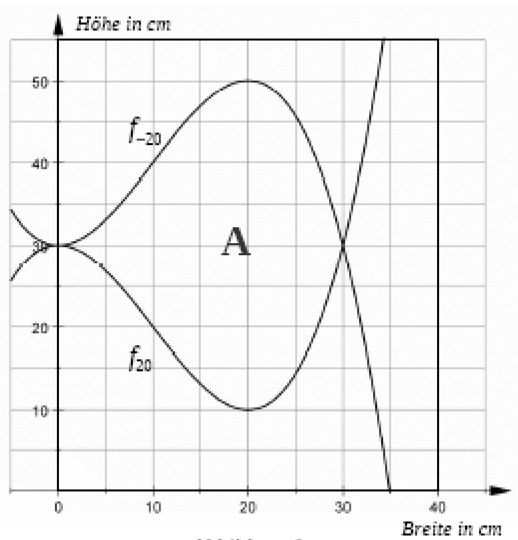

Abbildung 1

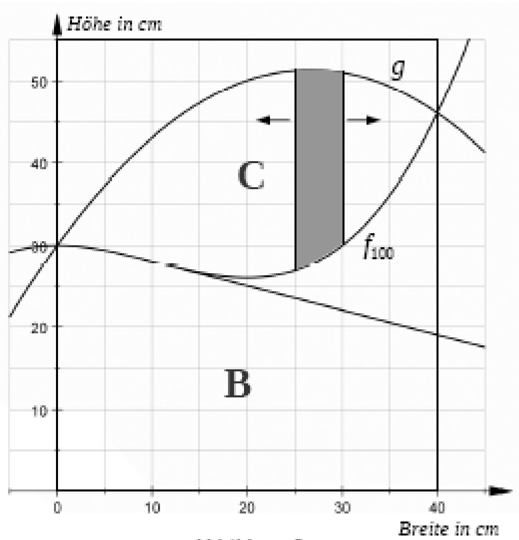

Abbildung 2

Die Funktionen f_a sind gegeben durch $f_a(x) = \frac{1}{10a}x^3 - \frac{3}{a}x^2 + 30,\ a \neq 0,\ x \in IR$.

In der *Abbildung 1* werden die obere und untere Schnittkante des Blechteils A durch Abschnitte der Graphen der Funktionen f_{-20} und f_{20} beschrieben; in der *Abbildung 2* kann die untere Schnittkante von Teil C ebenfalls durch den Graphen einer Funktion f_a beschrieben werden.

a) *Zeigen Sie, dass sich die Graphen aller Funktionen f_a nur in den Punkten $S_1(0\,|\,30)$ und $S_2(30\,|\,30)$ schneiden.*
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Blechteils A.

b) Zur Stabilisierung des Blechteils A soll symmetrisch zur Verbindungslinie der Extrempunkte von f_{-20} und f_{20} und damit parallel zur rechten und linken Kante des Reparaturbleches ein Blechstreifen von 6 cm Breite aufgenietet werden.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten der Extrempunkte der Graphen von f_a. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Blechstreifens.

c) *Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte der Graphen der Funktionen f_a auf einer Geraden liegen.*
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Gleichung der Tangente an den Graphen von f_a im Wendepunkt.

d) Die obere Schnittkante des Blechteils B verläuft von der linken Kante des Reparaturbleches bis zum Wendepunkt auf dem Graphen von f_{100} und dann weiter auf der Wendetangente des Graphen von f_{100} bis zur rechten Kante des Reparaturbleches.

Bestimmen Sie die Länge der Schnittkante vom Wendepunkt $W(10 \mid 28)$ bis zur rechten Kante des Reparaturbleches.

e) Der Graph der Funktion f_{100} beschreibt die untere Schnittkante des Blechteils C. Die obere Schnittkante des Blechteils C ist Teil einer nach unten geöffneten Parabel, beschrieben durch g mit $g(x) = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{8}{5}x + 30$ (siehe *Abbildung 2*).

Bestimmen Sie den gesamten prozentualen Verschnitt beider Reparaturbleche.

f) Auf Blechteil C soll ein 5 cm breiter Blechstreifen parallel zur linken Kante des Reparaturbleches so aufgenietet werden, dass der Flächeninhalt des Streifens maximal ist, um hierdurch eine möglichst hohe stabilisierende Wirkung zu erzielen.

Ermitteln Sie ein rechnerisches Verfahren, mit dessen Hilfe der gesuchte Abstand des Blechstreifens von der linken Kante des Reparaturbleches bestimmt werden kann, und bestimmen Sie diesen Abstand.