S. 139 **13** $f(x) = 5 \cdot \frac{e^x - 2}{e^{2x}} = 5 \cdot (e^{-x} - 2e^{-2x}) = 5 \cdot e^{-x} \cdot (1 - 2e^{-x})$

a) Schnittpunkt mit der x-Achse $S(\ln(2)|0)$, mit der y-Achse $A(0|-5)$.
$f(x) = 5 \cdot (e^{-x} - 2e^{-2x}) = 5 \cdot e^{-x} \cdot (1 - 2e^{-x})$. Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$;
für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to 0$, $y = 0$ ist Asymptote.

b) $f'(x) = -5 \cdot e^{-x} + 20 \cdot e^{-2x}$; $f''(x) = 5 \cdot e^{-x} - 40 \cdot e^{-2x}$; $f'''(x) = -5 \cdot e^{-x} + 80 \cdot e^{-2x}$
$f'(x) = 0$ liefert $x_2 = 2 \cdot \ln(2)$. Da $f''(\ln(4)) = -\frac{5}{4} < 0$ ist, liegt ein Maximum vor.
Hochpunkt ist $H\left(\ln(4)\middle|\frac{5}{8}\right)$.
$f''(x) = 0$ liefert $x_3 = 3 \cdot \ln(2)$. Da $f'''(3 \cdot \ln(2)) = \frac{5}{8} \neq 0$ ist, ist $W\left(3 \cdot \ln(2)\middle|\frac{15}{32}\right)$ einziger Wendepunkt. Steigung im Wendepunkt: $f'(3 \cdot \ln(2)) = -\frac{5}{16}$.

c) Siehe Fig. 1

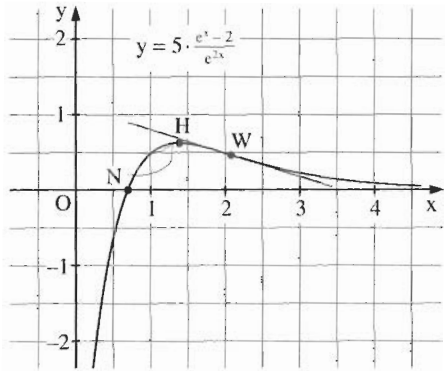


Fig. 1

d) $A = -\int_0^{\ln(2)} 5 \cdot \frac{e^x - 2}{e^{2x}}\,dx = -\int_0^{\ln(2)} 5 \cdot (e^{-x} - 2e^{-2x})\,dx = -\left[-5e^{-x} + 5e^{-2x}\right]_0^{\ln(2)} = \frac{5}{4}$

e) Da $f'(x) = -5 \cdot e^{-x} + 20 \cdot e^{-2x} = 5 \cdot e^{-2x} \cdot (-e^x + 4) < 0$ ist für $x > 2 \cdot \ln(2) = \ln(4)$, ist f für $x > \ln(4)$ streng monoton fallend und damit umkehrbar. Aus $y = 5 \cdot (e^{-x} - 2e^{-2x})$ erhält man durch Substitution $e^{-x} = u$: $y = 5(u - 2u^2)$ oder $10u^2 - 5u + y = 0$, also
$u = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{y}{10}}$ **bzw.** $u = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{y}{10}}$. Daraus ergibt sich $x = -\ln\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{y}{10}}\right)$ bzw.
$x = -\ln\left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{y}{10}}\right)$.

39 **14** $f_t(x) = e^{tx-\frac{1}{2}x^2}$; $t \in \mathbb{R}$, $D_{f_t} = \mathbb{R}$.

a) Keine Nullstellen. Asymptote ist die x-Achse für $x \to \pm\infty$.

$f_t'(x) = e^{tx-\frac{1}{2}x^2}\cdot(t-x)$; $f_t''(x) = e^{tx-\frac{1}{2}x^2}\cdot(x^2-2tx+t^2-1) = e^{tx-\frac{1}{2}x^2}\cdot(x-t-1)\cdot(x-t+1)$.

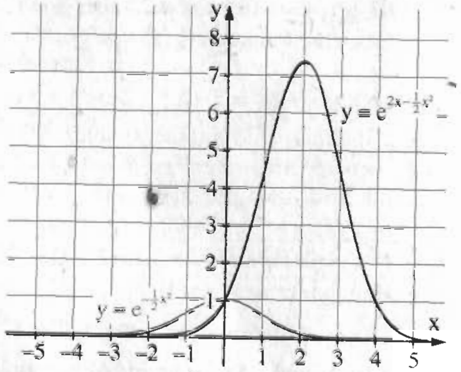
$f_t'(x) = 0$ ergibt $x_0 = t$. Da $f_t''(x) = -e^{\frac{1}{2}t^2} < 0$ ist, ist $H(t|e^{\frac{1}{2}t^2})$ einziger Hochpunkt.

$f_t''(x) = 0$ liefert $x_1 = t-1$ und $x_2 = t+1$. Da $f_t''(x)$ beim Durchgang durch $x_1 = t-1$ und $x_2 = t+1$ einen Vorzeichenwechsel erfährt, sind $W_1(t-1|e^{\frac{1}{2}(t^2-\frac{1}{2})})$ und $W_2(t+1|e^{\frac{1}{2}(t^2-\frac{1}{2})})$ Wendepunkte.

Symmetrie zu $x = t$ liegt vor, wenn gilt $f_t(t-h) = f_t(t+h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Dies ist der Fall, wie folgende Rechnung zeigt:

$f_t(t-h) = e^{t(t-h)-\frac{1}{2}(t-h)^2} = e^{t^2-t\cdot h-\frac{1}{2}t^2+t\cdot h-\frac{1}{2}h^2}$

$= e^{t^2+t\cdot h-\frac{1}{2}t^2-t\cdot h-\frac{1}{2}h^2} = e^{t(t+h)-\frac{1}{2}(t+h)^2} = f_t(x+h)$.



Graph für $t = 0$:

$H_0(0|1)$, $W_{0;1}(-1|e^{-\frac{1}{2}}) \approx W_{0;1}(-1|0{,}6065)$,

$W_{0;2}(1|e^{-\frac{1}{2}}) \approx W_{0;2}(1|0{,}6065)$

Graph für $t = 2$:

$H_2(2|e^2) \approx H(2|7{,}3891)$, $W_{2;1}(1|e^{\frac{3}{2}}) \approx W_{2;1}(1|4{,}4817)$, $W_{2;2}(3|e^{\frac{3}{2}}) \approx W_{2;1}(3|4{,}4817)$

b) Tangenten vom Ursprung an K_t.

Gegeben sei ein Punkt $P(a|e^{ta-\frac{1}{2}a^2})$ des Graphen. Steigung in P: $f_t'(a) = e^{ta-\frac{1}{2}a^2}\cdot(t-a)$.

Gleichung der Tangente: $y = e^{ta-\frac{1}{2}a^2}\cdot(t-a)\cdot(x-a) + e^{ta-\frac{1}{2}a^2}$. Da die Tangente durch den Ursprung verlaufen soll, muss gelten: $0 = e^{ta-\frac{1}{2}a^2}\cdot(t-a)\cdot(0-a) + e^{ta-\frac{1}{2}a^2}$ oder

$0 = e^{ta-\frac{1}{2}a^2}\cdot(a^2-at+1)$ oder $a^2-at+1 = 0$. Dies ist eine quadratische Gleichung mit der Variablen a. Ihre Diskriminante ist $D = t^2-4$. Die Gleichung hat also zwei Lösungen für $D > 0$, genau eine Lösung für $D = 0$ und keine Lösung für $D > 0$. Damit gilt:

Es gibt keine Tangente an K_t für $t^2-4 < 0$, also für $-2 < t < 2$,
eine Tangente an K_t für $t^2-4 = 0$, also für $t = -2$ und $t = 2$,
zwei Tangenten an K_t für $t^2-4 > 0$, also für $t < -2$ und $t > 2$.

15 $f_t(x) = \ln\left(t\cdot\frac{1+x}{1-x}\right)$, $t > 0$

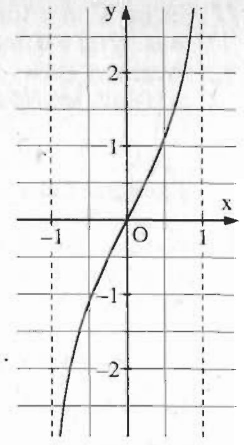
a) Es gilt für die Definitionsmenge: $\frac{1+x}{1-x} > 0$, d.h. $(1+x > 0$ und $1-x > 0)$ oder $(1+x < 0$ und $1-x < 0)$, d.h. $(x > -1$ und $x < 1)$ oder $(x < -1$ und $x > 1)$, d.h. $-1 < x < 1$. $D_t = (-1; 1)$. Schnittpunkt mit der x-Achse: $t\cdot\frac{1+x}{1-x} = 1$, also $x = \frac{1-t}{1+t}$; damit $N\left(\frac{1-t}{1+t}\middle|0\right)$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0|\ln t)$.

Für $x \to 1$ gilt $f_t(x) \to +\infty$; damit ist $x = 1$ Asymptote.
Für $x \to -1$ gilt $f_t(x) \to -\infty$; damit ist $x = -1$ Asymptote.

$f_t'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$; $f_t''(x) = \frac{4x}{(1+x)^2(1-x)^2}$; $f_t'''(x) = \frac{4\cdot(3x^2+1)}{(1+x)^3(1-x)^3}$.

Wendepunkt ist $W(0|\ln(t))$, also der Schnittpunkt mit der y-Achse. Graph von K_1 siehe nächste Seite.

S. 139 **15** b) Da $\ln\left(t\cdot\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(t) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ist, entsteht der Graph K_t aus dem von K_1 durch Verschiebung in y-Richtung um den Wert $\ln(t)$.



c) $f_t'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)} > 0$ für alle $x \in D_t$. Damit ist f_t streng monoton zunehmend.

Da $f_t''(x) = 0$ ist für $x_0 = 0$, kann nur in $x_0 = 0$ ein relatives Extremum von f_t' vorliegen. Es ist ein Minimum wegen $f_t'''(0) = 4 > 0$. Das Minimum hat den Wert $f_t'(0) = 2$. Da $f_t'(x) \to +\infty$, können die Tangentensteigungen alle Werte zwischen 2 einschließlich und unendlich annehmen.

d) Tangente in $P_t\left(a\middle|\ln\left(t\cdot\frac{1+a}{1-a}\right)\right)$ hat die Steigung $f_t(a) = \frac{2}{(1+a)(1-a)}$.

Es muss gelten:

$2 = \frac{2}{(1+a)(1-a)}$, also $a = 0$. Damit ist $P_t(0|\ln(t))$. Gleichung der Tangente in P_t: $y = 2x + \ln(t)$. Es gilt also $\ln t = 3$, also $t = e^3$.

e) Ortslinie aller Wendepunkte $x = 0$.

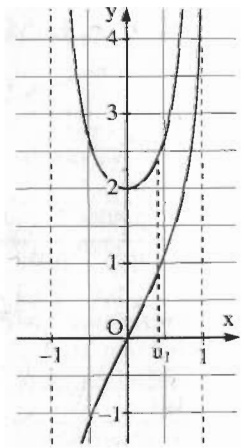
f) Aus $y = \ln\left(t\cdot\frac{1+x}{1-x}\right)$ errechnet man $e^y = t\cdot\frac{1+x}{1-x}$, also $x = \frac{e^y-t}{e^y+t}$. Es ist $\overline{f}_t(x) = \frac{e^x-t}{e^x+t}$. K_t geht aus K_1 durch Verschiebung in x-Richtung um $\ln(t)$ hervor, da der Graph von f an der Geraden $y = x$ gespiegelt wurde. Damit kann K_t alle Tangentensteigungen von 0 bis einschließlich $\frac{1}{2}$ annehmen.

g) $G(x) = \frac{1}{b-a}\cdot\ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{b-a}\cdot(\ln(x+a) - \ln(x+b))$ hat die Ableitung

$G'(x) = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) = \frac{b-a}{(b-a)(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)}$.

Damit ist G eine Stammfunktion von g.

16 $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$ mit $-1 < x < 1$, $g(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.



Es ist $P_u(u|f(u)) = P_u\left(u\middle|\frac{2}{1-u^2}\right)$ und $Q_u\left(u\middle|\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right)$ mit $0 < u < 1$.

Es ist $d(u) = \frac{2}{1-u^2} - \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{2}{1-u^2} - \ln(1+u) + \ln(1-u)$.

Ableitungen: $d'(u) = -2\cdot(1-u^2)^{-2}\cdot(-2u) - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{1-u} =$

$= \frac{4u}{(1-u^2)^2} + \frac{2}{(u+1)(u-1)} = \frac{2u^2+4u-2}{(1-u^2)^2}$.

$d'(u) = 0$ ergibt $u_1 = \sqrt{2}-1$, $u_2 = -\sqrt{2}-1$. Ein relativer Extremwert kann wegen $u > 0$ somit nur in u_1 auftreten.

Es ist $d(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1-\ln(\sqrt{2}+1) \approx 1{,}5328$.

Wegen $d(0) = 2$ und $d(u) \to +\infty$ für $u \to 1$ kann in u_1 nur ein absolutes Minimum vorliegen. Für den Wert $u_1 = \sqrt{2}-1$ wird also der Abstand $\overline{P_uQ_u}$ minimal, nämlich 1,5328.

17 $f(x) = 10x\cdot e^{-x^2}$. Wegen der Punktsymmetrie des Graphen zum Ursprung genügt es, $a > 0$ zu wählen. $A(a) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot 10a\cdot e^{-a^2} = 5a^2\cdot e^{-a^2}$. Es ist $\lim\limits_{a\to 0} A(a) = 0$ und $\lim\limits_{a\to\infty} A(a) = 0$. Damit muss ein relatives Maximum auch ein absolutes Maximum sein.