Ministerium für
Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018

Mathematik

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Stochastik

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (Innermathematische Argumentationsaufgabe)

Aufgabe 4: Analysis (Aufgabe mit realitätsnahem Kontext)

2. Aufgabenstellung [1]

siehe Prüfungsaufgaben

3. Materialgrundlage

entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen
  (Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei)

Inhaltsfeld Stochastik (S)

- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

5. Zugelassene Hilfsmittel

Prüfungsteil A:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Prüfungsteil B:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computeralgebrasystem)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Aufgabe 1:

Modelllösung a)

$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$.

$f'(2) = 9$.

Modelllösung b)

Wegen $f'(0) = -1$ hat der Graph von f an der Stelle $x = 0$ eine negative Steigung, d. h. er fällt. Da der Graph A an der Stelle $x = 0$ steigt, muss es sich bei dem Graphen B um den Graphen von f handeln.

Aufgabe 2:

Modelllösung a)

	Nicht-Senioren	Senioren	Summe
Nutzer	75 %	10 %	85 %
Nicht-Nutzer	5 %	10 %	15 %
Summe	80 %	20 %	100 %

Modelllösung b)

$P(\text{„Senior“}|\text{„Nutzer“}) = \frac{0{,}10}{0{,}85}$.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

Aus der Gleichung $f(x) = 0$ ergibt sich mit dem GTR/CAS als kleinste Nullstelle $a \approx -1{,}74$.

Modelllösung b)

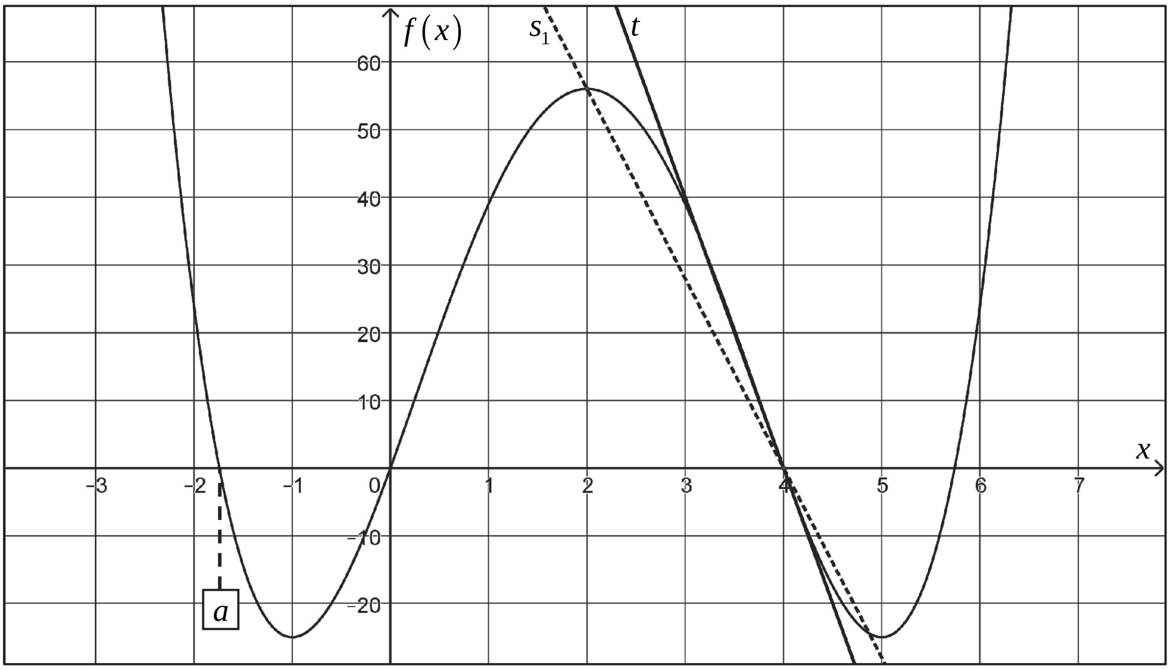
$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 40$.

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die drei Lösungen $x = -1$, $x = 2$ und $x = 5$.

Da zusätzlich $f'(0) = 40 > 0$ und $f'(3) = -32 < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor. $x = 2$ ist also eine lokale Maximalstelle von f.

Modelllösung c)

(1)



$m_{s_1} = \frac{0-56}{4-2} = -28$.

(2) Ansatz: $t: y = m \cdot x + b$.

$m = f'(4) = -40$.

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P_1(4 \mid 0)$ liefert:

$0 = -40 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 160$.

Damit ist eine Gleichung der Tangente $t: y = -40 \cdot x + 160$.

(3) Siehe Lösung von c) (1).

(4) Eine geringe Abweichung der Sekantensteigung von der Tangentensteigung wird erreicht, wenn der Punkt P_2 „nah“ am Punkt P_1 liegt.

Die folgende Tabelle soll die Korrektur erleichtern.

P_2 (Funktionswerte ggf. gerundet)	Sekantensteigung m_{s_2} (Ggf. gerundet)	Unterschied von m_{s_2} zu $m_t = -40$
$P_2(3{,}9 \mid 4{,}0521)$	$-40{,}521$	$0{,}521$
$P_2(3{,}99 \mid 0{,}400592)$	$-40{,}0592$	$0{,}0592 < 0{,}1$
$P_2(3{,}999 \mid 0{,}0400060)$	$-40{,}0060$	$0{,}0060 < 0{,}1$
$P_2(4{,}1 \mid -3{,}9319)$	$-39{,}319$	$0{,}681$
$P_2(4{,}01 \mid -0{,}399392)$	$-39{,}9392$	$0{,}0608 < 0{,}1$
$P_2(4{,}001 \mid -0{,}0399940)$	$-39{,}9940$	$0{,}0060 < 0{,}1$

Modelllösung d)

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x-3)$.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)

$h(1{,}5) = 150$.

Am 21.10.2016 um 12:00 Uhr betrug der Wasserstand am Pegel in Bonn 150 cm.

Modelllösung b)

$\frac{h(3)-h(1)}{2} = \frac{400}{27} \approx 14{,}8$.

Im Zeitraum vom 21.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 23.10.2016, 0:00 Uhr, stieg das Wasser des Rheins am Pegel in Bonn mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von ungefähr 14,8 cm pro Tag an.

Modelllösung c)

$h'(t) = -\frac{80}{9} \cdot t^2 + \frac{80}{3} \cdot t$.

Aus der notwendigen Bedingung $h'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen $t = 0$ und $t = 3$.

Zusätzlich gilt $h'(2) = \frac{160}{9} > 0$ (s. o.) und $h'(3{,}5) = -\frac{140}{9} < 0$. Daher liegt an der Stelle $t = 3$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von h' von + nach – und damit ein lokales Maximum von h vor. Wegen $h(0) = 130$, $h(3) = 170$ und $h(3{,}5) = \frac{4490}{27} \approx 166{,}3$ liegt bei $t = 0$ das absolute Minimum und bei $t = 3$ das absolute Maximum von h im Intervall $[0;3{,}5]$ vor.

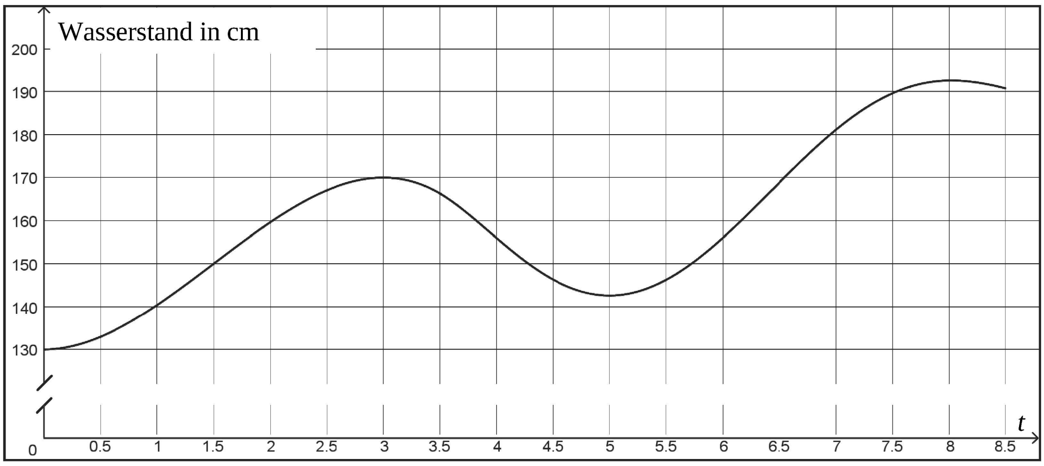
Der niedrigste Wasserstand an der Messstelle in Bonn im betrachteten Zeitraum beträgt 130 cm, der höchste Wasserstand beträgt 170 cm.

Modelllösung d)

Die Gleichung $h(t) = 140$ hat im Intervall $[0;3{,}5]$ nur eine Lösung t_1 mit $t_1 \approx 0{,}98$, die Gleichung $h(t) = 150$ hat im Intervall $[0;3{,}5]$ nur die Lösung $t = 1{,}5$.

Damit gilt: Die Länge des Zeitraumes zwischen dem 20.10.2016, 0:00 Uhr, und dem 23.10.2016, 12:00 Uhr, in dem der Wasserstand an der Messstelle in Bonn zwischen 140 cm und 150 cm gelegen hat, beträgt ungefähr 0,5 Tage.

Modelllösung e)



7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule:____

Aufgabe 1:

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt $f'(x)$ an.	2	
2	berechnet $f'(2)$.	1	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe a)	**3**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	entscheidet mit Hilfe der Eigenschaft $f'(0) = -1$ begründet, welcher der beiden Graphen der Graph von f ist.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**3**	

	Summe Aufgabe 1	**6**	

Aufgabe 2:

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	stellt den beschriebenen Sachverhalt dar, indem er alle Prozentsätze in der *Tabelle* angibt.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe a)	**4**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	stellt einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass die Person ein Senior ist.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe b)	**2**	

	Summe Aufgabe 2	**6**	

Aufgabe 3:

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt die in der *Abbildung* markierte Nullstelle a auf zwei Nachkommastellen genau.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe a)	**2**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt $f'(x)$ an.	2	
2	weist mit einer notwendigen Bedingung nach, dass $x=2$ eine mögliche lokale Extremstelle der Funktion f ist.	2	
3	weist rechnerisch nach, dass $x=2$ eine lokale Maximalstelle der Funktion f ist.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**6**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) zeichnet die Sekante s_1 durch die Punkte $H_1(2\,\|\,56)$ und $P_1(4\,\|\,0)$ des Graphen von f in die *Abbildung* ein und berechnet die Steigung von s_1.	3	
2	(2) bestimmt rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P_1(4\,\|\,0)$.	4	
3	(3) zeichnet die Tangente t in die *Abbildung* ein.	2	
4	(4) ermittelt durch systematisches Probieren die Koordinaten eines Punktes P_2 so, dass die Bedingung erfüllt ist.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe c)	**12**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	gibt den Faktor $\frac{1}{2}$ an.	2	
2	gibt eine Gleichung von g an.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

	Summe Aufgabe 3	**24**	

Aufgabe 4:

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	berechnet den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn am 21.10.2016 um 12:00 Uhr.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe a)	**3**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	berechnet $\frac{h(3)-h(1)}{2}$ und interpretiert den berechneten Wert im Sachzusammenhang.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………………….......... …………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**4**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	gibt $h'(t)$ an.	2	
2	ermittelt mit einer notwendigen Bedingung die möglichen lokalen Extremstellen der Funktion *h*.	2	
3	ermittelt rechnerisch den niedrigsten und höchsten Wasserstand im betrachteten Zeitraum.	5	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**9**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	bestimmt rechnerisch, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140 cm und 150 cm lag.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	skizziert, passend zu der in *Abbildung 4* gegebenen momentanen Änderungsrate, in *Abbildung 3* den weiteren Verlauf des Wasserstandes bis zum 28.10.2016, 12:00 Uhr.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe e)	**4**	

	Summe Aufgabe 4	**24**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der dritten Aufgabe	**24**	
Übertrag der Punktsumme aus der vierten Aufgabe	**24**	
Gesamtpunktzahl	**60**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	52 – 60
gut	43 – 51
befriedigend	34 – 42
ausreichend	25 – 33
mangelhaft	13 – 24
ungenügend	0 – 12