Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

1. Aufgabenart

Analysis, Stochastik

2. Aufgabenstellung

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil	
Aufgabe 1: Analysis	*(6 Punkte)*
Aufgabe 2: Stochastik	*(6 Punkte)*
Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln	
Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)	*(24 Punkte)*
Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)	*(24 Punkte)*

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezug zu den Vorgaben 2016

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen
  (Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei)

Inhaltsfeld Stochastik (S)

- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

5. Zugelassene Hilfsmittel

Teil I:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Teil II:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Aufgabe 1: Analysis

Modelllösung

$f'(x) = x^2 - 10 \cdot x + 16$

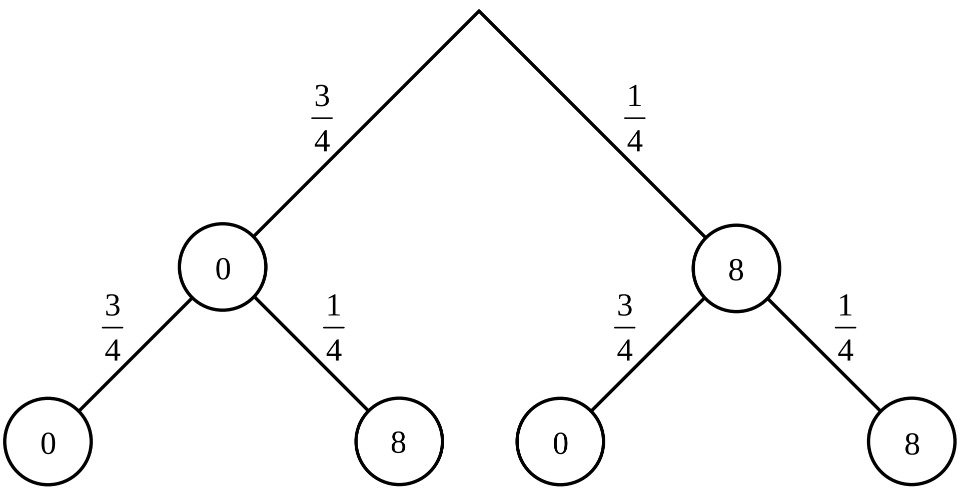
Mit der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ ergeben sich aus $x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 5 - \sqrt{5^2 - 16} = 2$ und $x_2 = 5 + \sqrt{5^2 - 16} = 8$.

Zusätzlich gilt $f'(0) = 16 > 0$, $f'(5) = -9 < 0$ und $f'(10) = 16 > 0$. Daher liegt an der Stelle $x_1 = 2$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – und an der Stelle $x_2 = 8$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + vor.

2 ist also eine lokale Maximalstelle und 8 eine lokale Minimalstelle von f.

Aufgabe 2: Stochastik

Modelllösung a)



Modelllösung b)

(1) $P(\text{„Summe 0“}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$P(\text{„Summe 8“}) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(\text{„Summe 16“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(2) Erwartungswert der Auszahlung (ohne Berücksichtigung des Einsatzes):

$$0\,€\cdot\frac{9}{16}+8\,€\cdot\frac{6}{16}+80\,€\cdot\frac{1}{16}=8\,€$$

Auf lange Sicht werden durchschnittlich 8 € pro Spiel ausgezahlt, d. h. ein Spieler erhält seinen Einsatz zurück. Das Spiel ist also fair.

Oder:

Erwartungswert des Gewinns (unter Berücksichtigung des Einsatzes):

$$-8\,€\cdot\frac{9}{16}+0\,€\cdot\frac{6}{16}+72\,€\cdot\frac{1}{16}=0\,€$$

Auf lange Sicht macht ein Spieler weder Gewinn noch Verlust. Das Spiel ist also fair.

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Modelllösung a)

(1) Ansatz: $s: y=m\cdot x+b$

$$m=\frac{1-\frac{13}{4}}{9-3}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $T\left(9\,\middle|\,1\right)$ liefert:

$$-\frac{3}{8}\cdot 9+b=1 \Leftrightarrow b=\frac{35}{8}=4{,}375\,.$$

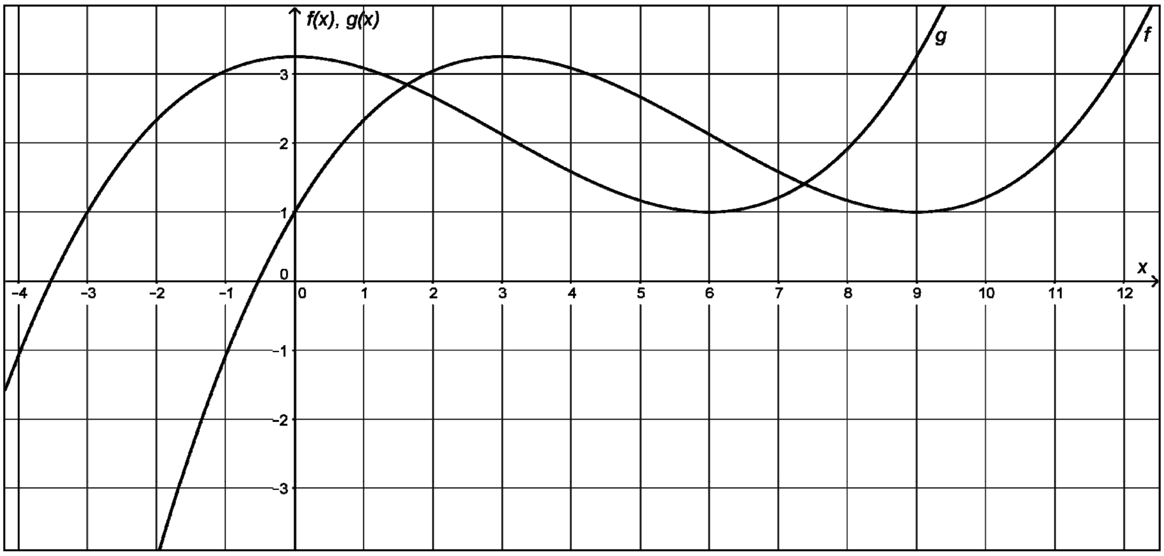
Damit ist die Gleichung der Geraden $s: y=-\frac{3}{8}\cdot x+\frac{35}{8}$.

(2) $f'(x)=\frac{1}{16}\cdot x^2-\frac{3}{4}\cdot x+\frac{27}{16}$

Aus der Bedingung $f'(x)=-\frac{3}{8}$ ergeben sich die beiden Lösungen $x_1=6-\sqrt{3}\approx 4{,}27$ und $x_2=6+\sqrt{3}\approx 7{,}73$.

Modelllösung b)

(1)



(2) Der Graph von g geht durch eine Verschiebung um 3 Einheiten nach links aus dem Graphen von f hervor.

(3) $g(x) = f(x+3)$

Modelllösung c)

(1) Zum Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(0,8)}{2-0,8}$ gehört die *Abbildung 2.3*.

(2) $f'(2)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P\left(2 \middle| f(2)\right)$.

In den *Abbildungen 2.1* bis *2.5* ist jeweils die Steigung einer Sekante durch den Punkt $P\left(2 \middle| f(2)\right)$ und einen Nachbarpunkt N dargestellt. Der Punkt N läuft auf dem Graphen von f auf den Punkt P zu, die Sekante durch die Punkte N und P nähert sich der Tangente im Punkt P an. Die Steigung der Sekante durch die Punkte N und P entspricht dadurch immer genauer der Steigung der Tangente im Punkt P und somit dem Wert $f'(2)$.

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Modelllösung a)

(1) Um 7:00 Uhr morgens ($t = -5$) misst Heinz den Sonnenhöhenwinkel 20 Grad.

(2) Heinz misst im Zeitraum von 9:00 Uhr bis 15:00 Uhr ($t = -3$ bis $t = 3$) Sonnenhöhenwinkel, die mindestens 30 Grad betragen.

Modelllösung b)

$f(-5) - 20 = 1{,}2625$

Die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert beträgt ungefähr 1,3 Grad.

Modelllösung c)

$f'(t) = 0{,}0124 \cdot t^3 - 1{,}342 \cdot t$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die Lösungen $t_1 \approx -10{,}4$, $t_2 = 0$ und $t_3 \approx 10{,}4$.

t_1 und t_3 befinden sich nicht im betrachteten Intervall $[-10;10]$.

Wegen $f'(-1) = 1{,}3296 > 0$ und $f'(1) = -1{,}3296 < 0$ liegt an der Stelle t_2 ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – und damit ein lokales Maximum von f vor. Wegen $f(-10) = 0$, $f(0) = 36{,}1$ und $f(10) = 0$ handelt es sich auch um das absolute Maximum von f im Intervall $[-10;10]$.

Auch bei der Modellierung mit der Funktion f erreicht die Sonne um 12:00 Uhr mittags ihren höchsten Stand.

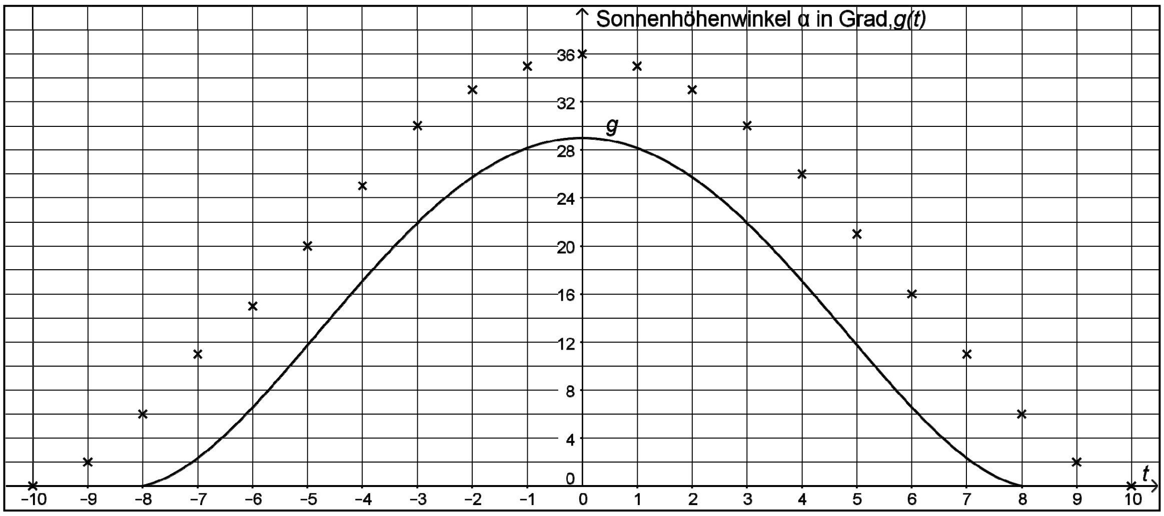
Modelllösung d)

(1) $f'(-9) = 3{,}0384 > 2{,}5848 = f'(-2)$

(2) Die positive lokale Änderungsrate $f'(-9)$ ist größer als die positive lokale Änderungsrate $f'(-2)$, der Sonnenhöhenwinkel nimmt also um 3:00 Uhr morgens schneller zu als um 10:00 Uhr morgens.

Modelllösung e)

(1)



(2) $a = \dfrac{29}{f(0)} = \dfrac{290}{361} \approx 0{,}80$

$b = \dfrac{-10}{-8} = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$ (Verhältnis der Nullstellen)

[Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f ist auch $b = -1{,}25$ eine richtige Lösung.]

7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule:____

Aufgabe 1: Analysis

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt $f'(x)$ an.	2	
2	untersucht die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………….......... ………………………………………………………………………..........			
	Summe insgesamt	**6**	

Aufgabe 2: Stochastik

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	erstellt für das Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………….......... ………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe a)	**2**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich die Summe 0 ergibt, die Summe 8 ergibt und die Summe 16 ergibt.	2	
2	(2) untersucht, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………….............. ……………………………………………………………………………..............			
	Summe Teilaufgabe b)	**4**	

	Summe insgesamt	**6**	

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) ermittelt rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte H und T.	5	
2	(2) ermittelt auf zwei Nachkommastellen genau die Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden s verlaufen.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………………….............. ……………………………………………………………………………..............			
	Summe Teilaufgabe a)	**9**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) zeichnet den Graphen von g in die *Abbildung 1* ein.	4	
2	(2) gibt die Transformation an, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.	2	
3	(3) gibt eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ………………………………………………………………………........... ………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**8**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) gibt an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(0,8)}{2-0,8}$ gehört.	2	
2	(2) gibt an, welche geometrische Bedeutung der Wert $f'(2)$ hat.	2	
3	(2) erklärt, warum in den *Abbildungen 2.1* bis *2.5* veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ………………………………………………………………………........... ………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**7**	

	Summe insgesamt	**24**	

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) gibt den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um 7:00 Uhr morgens misst.	2	
2	(2) gibt an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens 30 Grad betragen.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**4**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	berechnet die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**2**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	gibt $f'(t)$ an.	2	
2	weist rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne um 12:00 Uhr mittags ihren höchsten Stand erreicht.	5	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**7**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) weist nach, dass gilt: $f'(-9) > f'(-2)$.	2	
2	(2) interpretiert diese Ungleichung im Sachzusammenhang.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) skizziert in der *Abbildung 2* den Verlauf eines möglichen Graphen von g.	3	
2	(2) ermittelt für a einen zur Messung passenden Wert.	2	
3	(2) ermittelt für b einen zur Messung passenden Wert.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe e)	**7**	

	Summe insgesamt	**24**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der dritten Aufgabe	**24**	
Übertrag der Punktsumme aus der vierten Aufgabe	**24**	
Gesamtpunktzahl	**60**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	52 – 60
gut	43 – 51
befriedigend	34 – 42
ausreichend	25 – 33
mangelhaft	13 – 24
ungenügend	0 – 12