Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2014

Mathematik

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen	*(28 Punkte)*
Aufgabe 2: Verkehrsstau	*(28 Punkte)*

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

- Geraden und Geradengleichungen (z.B. g(A;B); Steigungswinkel; Parallelität)
- Nullstellen ganzrationaler Funktionen, in faktorisierter Form (keine Polynomdivision, einfaches Ausklammern)
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis $n = 3$: Nullstellen, Standardsymmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten (Links- und Rechtskrümmung), Wendepunkte (auch Sattelpunkte)
- Tangentengleichungen
- Einfache Transformationen wie Verschieben, Strecken oder Spiegeln von Funktionsgraphen ganzrationaler Funktionen 3. Grades
- Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitungsfunktion
- Differenzialrechnung in Sachzusammenhängen (z. B. durchschnittliche und momentane Änderungsrate; Interpretation ausgezeichneter Punkte im Sachkontext)

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

Die Modelllösung ist keine „Musterlösung“. Sie erhebt nicht den Anspruch, eine mögliche Darstellung des Prüflings wiederzugeben.

Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl in der Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative“ des Bewertungsbogens bewertet.

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Modelllösung a)

$f'(x) = x^2 - 4 \cdot x + 3$

Mit der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ ergeben sich aus $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 2 - \sqrt{4-3} = 1$ und $x_2 = 2 + \sqrt{4-3} = 3$.

Da zusätzlich $f'(0) = 3 > 0$, $f'(2) = -1 < 0$ und $f'(4) = 3 > 0$ gelten, liegt an der Stelle $x_1 = 1$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – und an der Stelle $x_2 = 3$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + vor. 1 ist also eine lokale Maximalstelle und 3 eine lokale Minimalstelle von f.

[Zur Erleichterung der Korrektur bei Verwendung der zweiten Ableitung beim hinreichenden Kriterium: $f''(x) = 2 \cdot x - 4$, $f''(1) = -2$, $f''(3) = 2$]

Da außerdem $f(1) = \frac{16}{3}$ und $f(3) = 4$ gelten, besitzt der Graph von f den lokalen Hochpunkt $H\left(1 \,\middle|\, \frac{16}{3}\right)$ und den lokalen Tiefpunkt $T\left(3 \,|\, 4\right)$.

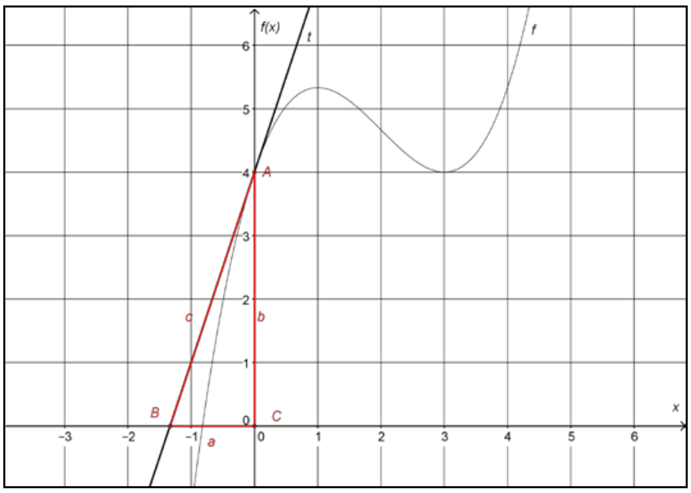
Modelllösung b)

(1) Gleichung der Tangente t: $y = m \cdot x + b$:

$m = f'(0) = 3$, $b = f(0) = 4$

Damit ist die Gleichung der Tangente t: $y = 3 \cdot x + 4$.

(2)



(3) Für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt (siehe Abbildung): $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Wegen $3 \cdot x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$ gilt $a = \frac{4}{3}$ (LE) und damit $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$ (FE).

Für die Seite c des Dreiecks (siehe Abbildung) gilt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{3} \approx 4{,}22 \text{ (LE)}$$

Damit gilt für den Umfang U des Dreiecks:

$$U = a + b + c = \frac{4}{3} + 4 + \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{3} \approx 1{,}33 + 4 + 4{,}22 = 9{,}55 \text{ (LE).}$$

Modelllösung c)

$g(x) = f(x-1) - \frac{16}{3}$ oder $g(x) = f(x-1) - 4$

1 und 3 sind Extremstellen des Graphen von f . Wird der Graph von f zunächst um eine Einheit nach rechts verschoben, so sind 2 und 4 Extremstellen des verschobenen Graphen, die Eigenschaft 1 ist erfüllt.

Wird der verschobene Graph nun noch so weit nach unten verschoben, bis einer der beiden Extrempunkte auf der x-Achse liegt, so ist auch Eigenschaft 2 erfüllt.

Modelllösung d)

Die Nullstelle von f ist die Stelle des lokalen Tiefpunktes des Graphen von F.

Bei der Funktion f liegt an Nullstelle ein Wechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f vor, für die Funktion F bedeutet dies einen Übergang von einer negativen Steigung zu einer positiven Steigung des Graphen.

Modelllösung e)

Wenn man den Funktionsterm von f als Produkt in der Form $f(x) = (x+1) \cdot q(x)$ mit einer quadratischen Funktion q darstellen könnte, würde $f(-1) = (-1+1) \cdot q(-1) = 0 \cdot q(-1) = 0$ gelten. Wie man z. B. durch die Berechnung $f(-1) = -\frac{4}{3}$ oder am Graphen der Funktion f erkennen kann, ist $x = -1$ keine Nullstelle von f . Somit ist die angegebene Produktdarstellung nicht möglich.

Aufgabe 2: Verkehrsstau

Modelllösung a)

(1) $f(13) = 1{,}6$

Um 13:00 Uhr ist der Stau 1,6 Kilometer lang.

(2) Die Staulänge wird durch eine abgeschätzte durchschnittliche Fahrzeuglänge zuzüglich des durchschnittlichen Fahrzeugabstandes dividiert.

Komplexere Lösungen, in denen z. B. die Anzahl der Fahrspuren berücksichtigt wird, werden natürlich ebenfalls anerkannt.

[Bei der Beurteilung der konkreten Annahmen sollte großzügig verfahren werden.]

Modelllösung b)

$f'(t) = -0{,}3 \cdot t^2 + 9 \cdot t - 66{,}3$

Mit der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich aus $-0{,}3 \cdot t^2 + 9 \cdot t - 66{,}3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 30 \cdot t + 221 = 0$ die beiden Lösungen $t_1 = 15 - \sqrt{225 - 221} = 13$ und $t_2 = 15 + \sqrt{225 - 221} = 17$.

Wegen $f'(12) = -\frac{3}{2} < 0$, $f'(15) = \frac{6}{5} > 0$ und $f'(18) = -\frac{3}{2} < 0$ liegt an der Stelle t_1 ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' und damit ein lokales Minimum von f vor und an der Stelle t_2 ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' und damit ein lokales Maximum von f vor.

[$f''(t) = -0{,}6 \cdot t + 9$, $f''(13) = \frac{6}{5} = 1{,}2$, $f''(17) = -\frac{6}{5} = -1{,}2$]

Wegen $f(12) = 2{,}3$, $f(17) = 4{,}8$ und $f(19) = 1{,}6$ ist die Staulänge um 17:00 Uhr mit 4,8 Kilometer maximal.

Modelllösung c)

$$\frac{f(17) - f(13)}{17 - 13} = 0{,}8$$

Die Staulänge nimmt zwischen 13:00 Uhr und 17:00 Uhr pro Stunde im Durchschnitt um 0,8 Kilometer zu.

Modelllösung d)

$f'(t) > 0$: Der Graph von f hat für $15 < t < 17$ eine positive Steigung, die Staulänge nimmt daher zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr ständig zu.

$f''(t) < 0$: Der Graph von f hat für $15 < t < 17$ eine Rechtkrümmung, die Staulänge nimmt daher zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr immer langsamer zu.

oder

$f''(t) < 0$: Die Änderungsrate von f' ist für $15 < t < 17$ negativ, die Staulänge nimmt daher zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr immer langsamer zu.

Modelllösung e)

(1) $f(19) = 1{,}6$, d. h. die Staulänge um 19:00 Uhr beträgt 1,6 Kilometer.

Der Stau hat sich $\frac{1{,}6}{3{,}6} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$ Stunden später, also ungefähr um 19:27 Uhr vollständig aufgelöst.

(2) Da die Staulänge gleichmäßig abnimmt, wird zur Modellierung der Staulänge eine lineare Funktion g mit $g(t) = m \cdot t + b$ verwendet.

Da die Staulänge sich pro Stunde um 3,6 Kilometer verringert, gilt $m = -3{,}6$.

Mit $g(19) = -3{,}6 \cdot 19 + b = 1{,}6 \Leftrightarrow b = 70$ ergibt sich die Funktionsgleichung

$g(t) = -3{,}6 \cdot t + 70$ $(19 \le t \le 19\frac{4}{9})$.

7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule:____

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt mit dem notwendigen Kriterium die möglichen lokalen Extremstellen von *f*.	3	
2	weist mit einem hinreichenden Kriterium nach, dass 1 eine lokale Maximalstelle und 3 eine lokale Minimalstelle des Graphen von *f* ist.	3	
3	berechnet die Funktionswerte an den Stellen 1 und 3.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (8) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**8**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) bestimmt rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$.	3	
2	(2) zeichnet die Tangente t in die Abbildung ein.	2	
3	(3) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks.	3	
4	(3) berechnet den Umfang des Dreiecks.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (11) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**11**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	gibt begründet eine mögliche Funktionsgleichung von g an.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (4) ……………………………………………………………………………........... ……………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**4**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	entscheidet begründet, welche dieser drei Möglichkeiten hier vorliegt.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (3) ……………………………………………………………………………........... ……………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**3**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	begründet, dass eine solche Darstellung nicht möglich ist.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (2) ……………………………………………………………………………........... ……………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe e)	**2**	

	Summe insgesamt	**28**	

Aufgabe 2: Verkehrsstau

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) berechnet die Länge des Staus um 13:00 Uhr.	2	
2	(2) berechnet mit Hilfe von zwei plausiblen Annahmen einen Schätzwert für die Anzahl der Fahrzeuge, die um 13:00 Uhr in diesem Stau stehen.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (5) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**5**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt mit dem notwendigen Kriterium die möglichen lokalen Extremstellen von f.	4	
2	prüft mit einem hinreichenden Kriterium die möglichen lokalen Extremstellen von f.	3	
3	gibt die maximale Länge des Staus an.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (9) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**9**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	bestimmt, um wie viele Kilometer die Staulänge in der Zeit von 13:00 Uhr bis 17:00 Uhr pro Stunde im Durchschnitt zunimmt.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (3) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe c)	**3**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	interpretiert, welche Bedeutung die beiden Ungleichungen im Sachzusammenhang der Aufgabe haben.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (4) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Uhrzeit, zu der sich der Stau vollständig aufgelöst hat.	3	
2	(2) ermittelt eine Funktionsgleichung der Funktion g.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative: (7) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe e)	**7**	

	Summe insgesamt	**28**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**28**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**28**	
Gesamtpunktzahl	**56**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Erreichte Punktsummen**
sehr gut	49 – 56
gut	41 – 48
befriedigend	33 – 40
ausreichend	24 – 32
mangelhaft	12 – 23
ungenügend	0 – 11