Beispielklausur für zentrale Klausuren

Mathematik

Aufgabenstellung

Die Titanwurz ist die Pflanze, die die größte Blüte der Welt hervorbringt. Für ein Referat hat ein Schüler in einem deutschen Gewächshaus eine solche Pflanze täglich beobachtet und ihre Blütenhöhe notiert. Er hat berechnet, dass sich die Höhe der Blüte während seiner Beobachtung gut durch die Funktion h mit

$$h(t) = -0{,}015 \cdot t^3 + 0{,}45 \cdot t^2 + 2$$

beschreiben lässt.

Dabei bezeichnet t die Anzahl der Tage, die seit dem Beobachtungsbeginn vergangen sind und $h(t)$ die Höhe der Blüte in cm.

Der Graph von h ist in Abbildung 1 dargestellt.

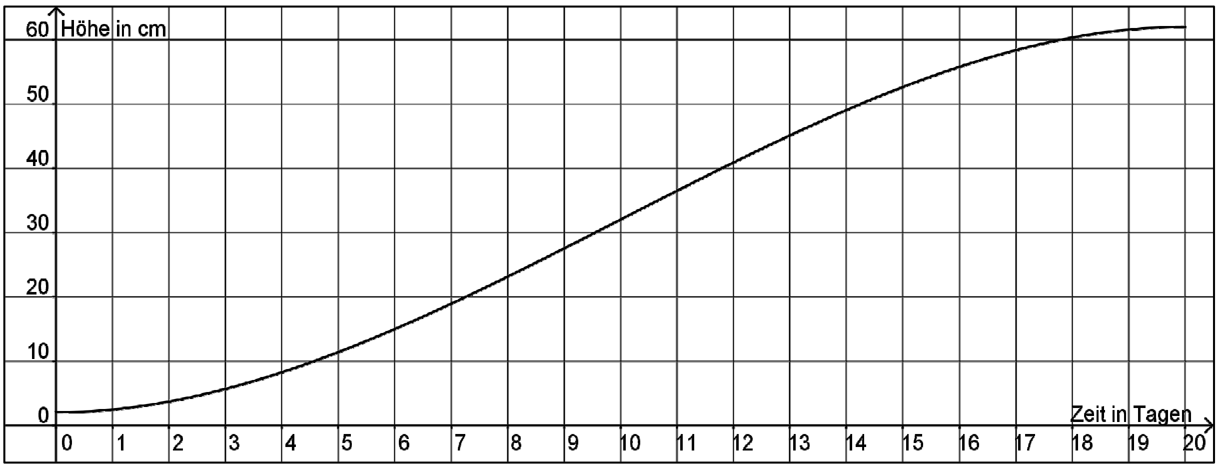

Abbildung 1

Mit dieser Funktion h ist es möglich, die folgenden Aufgaben a) bis d) zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die Höhe der Blüte* 3 *Tage nach Beobachtungsbeginn.* **(3 Punkte)**

b) *Berechnen Sie* $\frac{h(3)-h(0)}{3-0}$ *und berechnen Sie* $h'(3)$.

Geben Sie an, welche Bedeutung diese beiden von Ihnen berechneten Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang haben. **(8 Punkte)**

c) *Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Tagen ab Beobachtungsbeginn die Blüte der Pflanze ihre maximale Höhe erreicht.*

Berechnen Sie die maximale Höhe der Blüte. **(9 Punkte)**

d) Manche Botanische Gärten geben zwei Tage vor dem Zeitpunkt, an dem die Blüte der Pflanze am schnellsten wächst, ein besonderes Düngemittel.

Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze hier gedüngt werden müsste.
(6 Punkte)

e) In einem anderen Botanischen Garten, in Italien, wurde die Blüte der Titanwurz mehr als 4-mal so hoch wie die Blüte, die der Schüler in Deutschland beobachtet hat. In Abbildung 2 sind die Messungen für die italienische Blüte dargestellt.

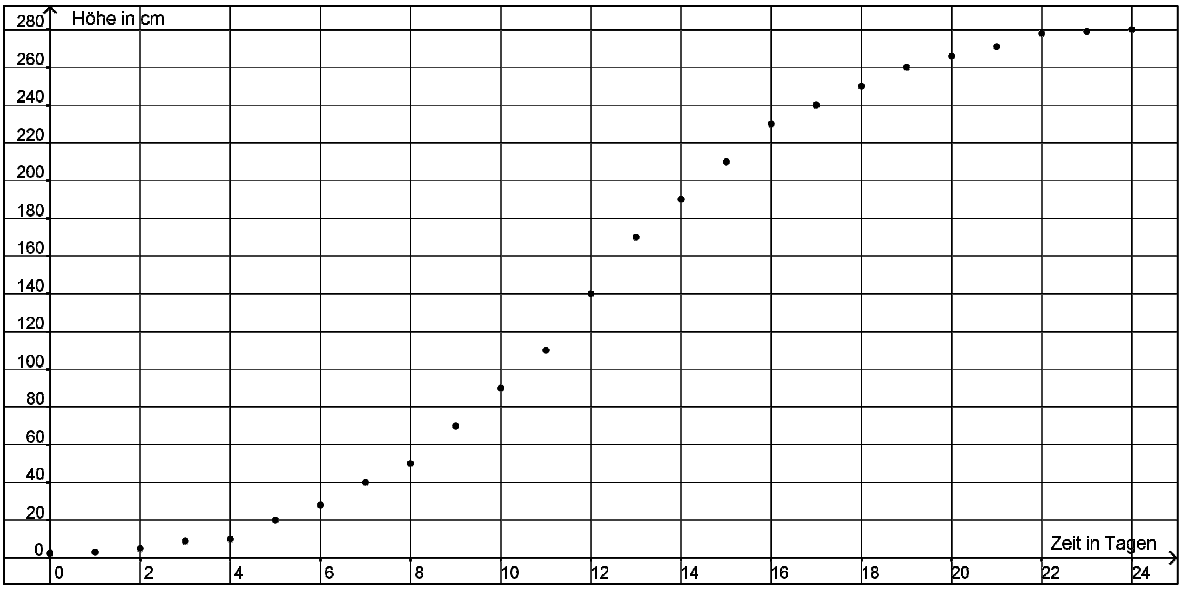

Abbildung 2

Der Schüler möchte auch hier eine ganzrationale Funktion f dritten Grades finden, die das Wachstum der Blüte aus Italien beschreibt. Dazu kann man sich auf der Grundlage der Abbildung 2 überlegen, welche Eigenschaften die gesuchte Funktion f haben soll. Diese Eigenschaften sollen in drei Gleichungen A bis C formuliert werden:

A	$f(\square) = \square$
B	$f'(\square) = \square$
C	$f''(\square) = \square$

Geben Sie für f, f' und f'' geeignete Zahlen in den sechs Kästchen an.

Begründen Sie für jede der drei Gleichungen Ihre Eintragungen. **(6 Punkte)**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung

Beispielklausur für zentrale Klausuren
Mathematik

Unterlagen für die Lehrkraft - Modelllösungen

Nr.		Punkte
2a	$h(3)=5{,}645$ Im Modell wäre die Blüte 3 Tage nach Beobachtungsbeginn ca. 5,6 cm hoch. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	3
2b	$\frac{h(3)-h(0)}{3-0}=1{,}215$ $h'(t)=-0{,}045\cdot t^2+0{,}9\cdot t$ $h'(3)=2{,}295$ Die Blüte hat im Modell in den ersten drei Tagen der Beobachtung eine durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit von ca. 1,2 cm pro Tag. Drei Tage nach Beobachtungsbeginn liegt eine momentane Wachstumsgeschwindigkeit von ca. 2,3 cm pro Tag vor. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	4 4
2c	Gesucht ist die Maximalstelle von *h* sowie das Maximum selbst. Mit der notwendigen Bedingung $h'(t)=0$ folgt: $-0{,}045\cdot t^2+0{,}9\cdot t=0$. Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $t_1=0$ und $t_2=20$. Wegen $h''(20)=-0{,}9<0$ liegt an der Stelle $t_2=20$ ein Maximum mit $h(20)=62$ vor. Für den gegebenen Sachzusammenhang handelt es sich offensichtlich auch um das absolute Maximum. Die Blüte erreicht 20 Tage nach Beobachtungsbeginn ihre maximale Höhe von 62 cm. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	9
2d	Gesucht ist zunächst die Zeit *t*, für die h' maximal ist.	6

	$h''(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}09 \cdot t + 0{,}9 = 0 \Leftrightarrow t = 10$. Weil zusätzlich $h'''(10) = -0{,}09 < 0$ gilt, ist $t = 10$ die gesuchte Stelle. Nach dem Modell sollte die Pflanze also 8 Tage nach Beobachtungsbeginn gedüngt werden. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	
2e	Beispielsweise können genannt werden:	
	A: $f(7) = 40$, weil ablesbar ist, dass die Blüte 7 Tage nach Beobachtungsbeginn eine Höhe von 40 cm erreicht hat.	2
	B: $f'(24) = 0$, weil die Blüte anscheinend nach 24 Tagen nicht weiter wächst.	2
	C: $f''(12) = 0$, weil die Blüte nach 12 Tagen die höchste Wachstumsgeschwindigkeit aufweist.	2
	Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
	Summe:	**32**

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	64 - 62
sehr gut	14	61 - 58
sehr gut minus	13	57 - 55
gut plus	12	54 - 52
gut	11	51 - 48
gut minus	10	47 - 45
befriedigend plus	9	44 - 42
befriedigend	8	41 - 38
befriedigend minus	7	37 - 35
ausreichend plus	6	34 - 32
ausreichend	5	31 - 28
ausreichend minus	4	27 - 25
mangelhaft plus	3	24 - 21
mangelhaft	2	20 - 17
mangelhaft minus	1	16 - 13
ungenügend	0	12- 0

Beispielklausur für zentrale Klausuren

Mathematik

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 4{,}5 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 9$.

Die Abbildung 1 zeigt den zu *f* gehörigen Graphen.

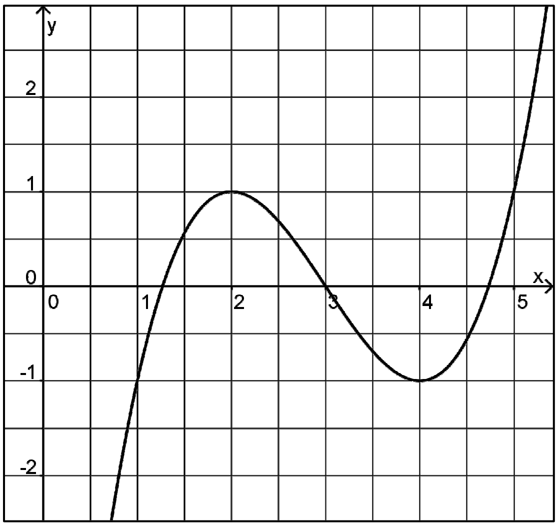

Abbildung 1

a) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f in* $H(2|1)$ *einen Hochpunkt und in* $T(4|{-1})$ *einen Tiefpunkt besitzt.*

(8 Punkte)

b) Die Funktion *f* lässt sich auch darstellen in der Form:

$$f(x) = (x-3) \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 3).$$

Ermitteln Sie alle Nullstellen von f und geben Sie diese nicht als Näherungswerte, sondern exakt an.

(3 Punkte)

c) *Zeigen Sie, dass der Graph von f den Wendepunkt* $W(3|0)$ *besitzt.*

Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f. **(7 Punkte)**

d) *Entscheiden Sie, ob die Aussagen A bis C jeweils wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidungen.*

A Die Steigung der Geraden durch die Punkte $T(4|{-1})$ und $A(6|f(6))$ beträgt 5.

B Der Graph der Ableitungsfunktion f' fällt für $x > 3$.

C Die Funktionswerte der Ableitung von f sind nie kleiner als $-1{,}5$. **(8 Punkte)**

e) Der Graph der Funktion *f* wird jetzt zwei einfachen Veränderungen unterzogen. Dabei entstehen jeweils die beiden Graphen der Abbildungen 2A und 2B.

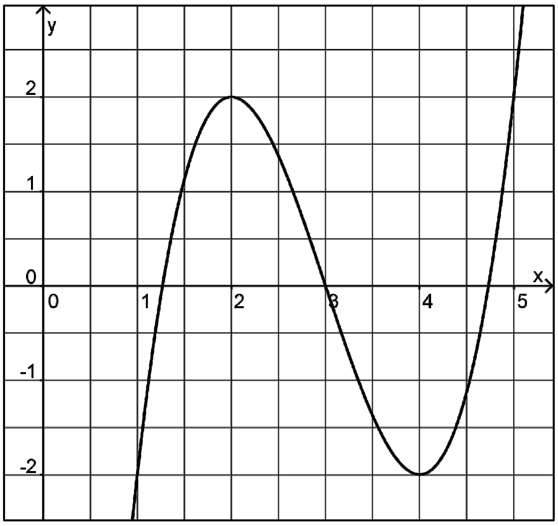

Abbildung 2A

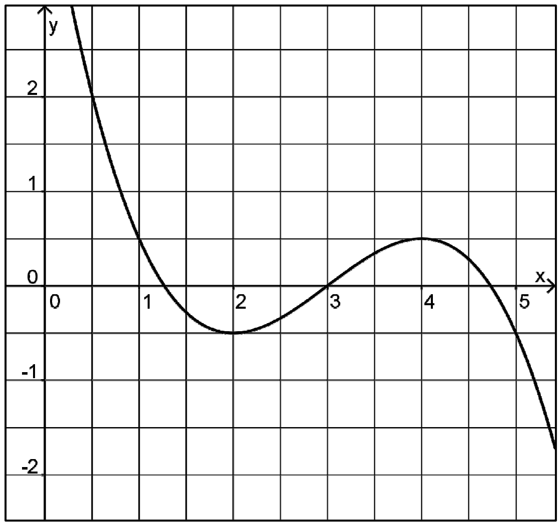

Abbildung 2B

(1) *Beschreiben Sie, wie der Graph in Abbildung 2A aus dem Graphen von f hervorgeht, und geben Sie an, welche Funktionsgleichung zu dem Graphen in dieser Abbildung passt, indem Sie diese aus den Möglichkeiten (A1) – (A3) auswählen.*

(A1) $g_1(x) = 2 \cdot f(x)$

(A2) $g_2(x) = 0{,}5 \cdot f(x)$

(A3) $g_3(x) = f(x) + 1$

(2) *Beschreiben Sie, wie der Graph in Abbildung 2B aus dem Graphen von f hervorgeht, und geben Sie zu dem Graphen in dieser Abbildung dann entsprechend selber eine geeignete Funktionsgleichung an.*

(6 Punkte)

Beispielklausur für zentrale Klausuren
Mathematik

Unterlagen für die Lehrkraft - Modelllösungen

Nr.		Punkte
1a	$f'(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 12$ $f''(x) = 3 \cdot x - 9$ $f'(2) = 0 \wedge f''(2) = -3 < 0, f(2) = 1$ $f'(4) = 0 \wedge f''(4) = 3 > 0, f(4) = -1$ Damit ergibt sich der Hochpunkt $H(2\|1)$ und der Tiefpunkt $T(4\|-1)$. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	8
1b	Nullstellen von f: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 3) = 0$ $\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}$ Damit ergeben sich die Nullstellen $x_1 = 3$, $x_2 = 3 - \sqrt{3}$ und $x_3 = 3 + \sqrt{3}$. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*	3
1c	$f'''(x) = 3$ $f''(3) = 0 \wedge f'''(3) = 3 \neq 0, f(3) = 0$ Damit ergibt sich der Wendepunkt $W(3\|0)$. Gleichung der Wendetangente t mit $y = m \cdot x + b$: $m = f'(3) = -1{,}5$ Wegen $W \in t$ ergibt sich: $0 = -1{,}5 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 4{,}5$ und damit die Gleichung der Wendetangente $t: y = -1{,}5 \cdot x + 4{,}5$. *Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit ent-*	3 4

	sprechender Punktzahl bewertet.	
1d	A: Die Aussage ist wahr, da für die Steigung der Geraden gilt: $m=\frac{f(6)-(-1)}{6-4}=\frac{9+1}{2}=5$	3
	B: Die Aussage ist falsch, da z. B. wegen $f''(4)=3>0$ der Graph von f' an der Stelle $x=4$ steigt.	2
	C: Die Aussage ist wahr, da an der Wendestelle $x=3$ der Graph von f am steilsten fällt und $f'(3)=-1{,}5$ gilt.	3
	Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
1e	(1) Der Graph der Abbildung 2A entsteht aus dem Graphen von f durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung. Daraus ergibt sich die passende Funktionsgleichung $g_1(x)=2\cdot f(x)$.	2
	(2) Der Graph der Abbildung 2B entsteht aus dem Graphen von f durch Stauchung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse. Daraus ergibt sich die passende Funktionsgleichung $h(x)=-0{,}5\cdot f(x)$.	4
	Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
	Summe:	**32**

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	64 - 62
sehr gut	14	61 - 58
sehr gut minus	13	57 - 55
gut plus	12	54 - 52
gut	11	51 - 48
gut minus	10	47 - 45

befriedigend plus	9	44 - 42
befriedigend	8	41 - 38
befriedigend minus	7	37 - 35
ausreichend plus	6	34 - 32
ausreichend	5	31 - 28
ausreichend minus	4	27 - 25
mangelhaft plus	3	24 - 21
mangelhaft	2	20 - 17
mangelhaft minus	1	16 - 13
ungenügend	0	12- 0