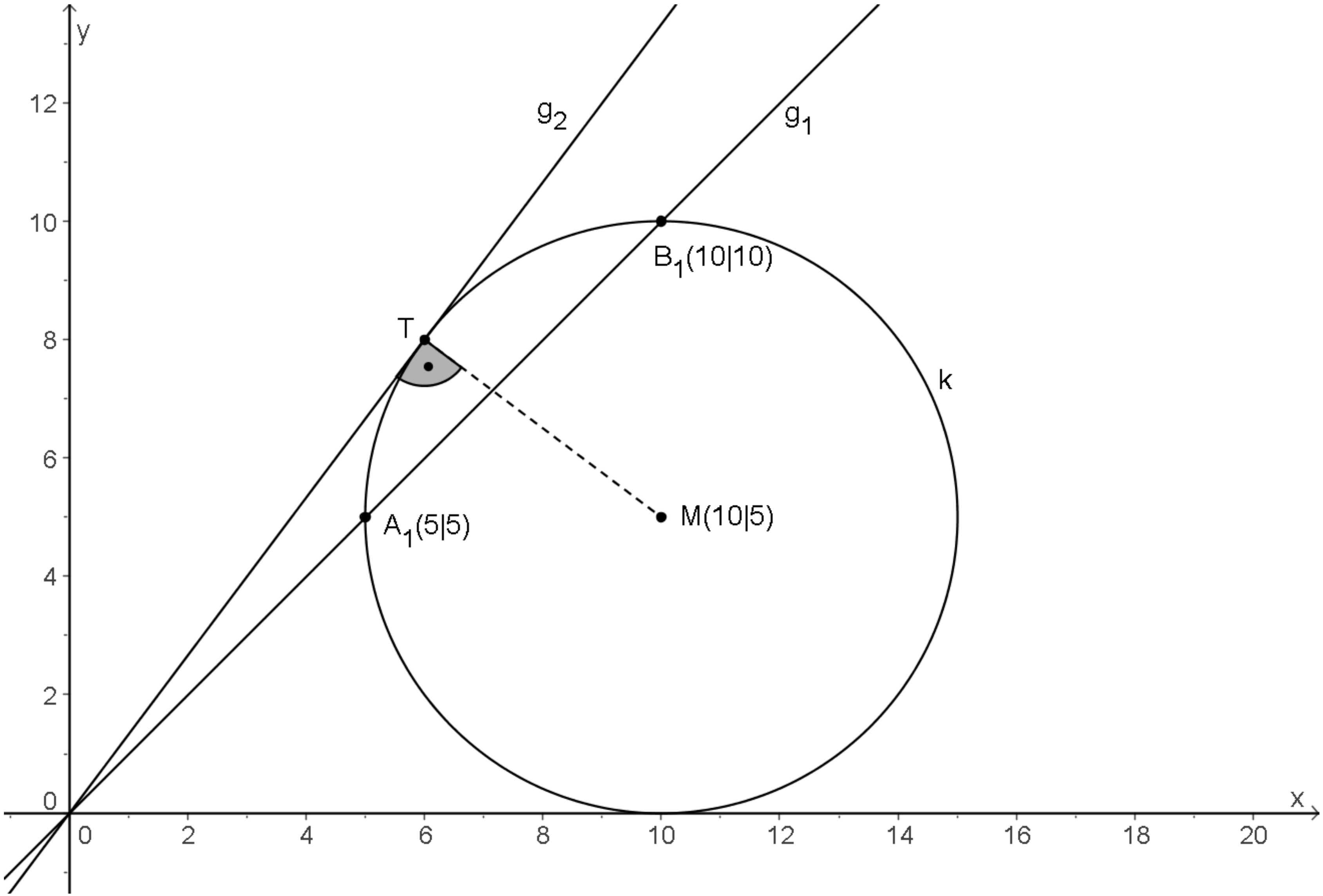
Lösungen

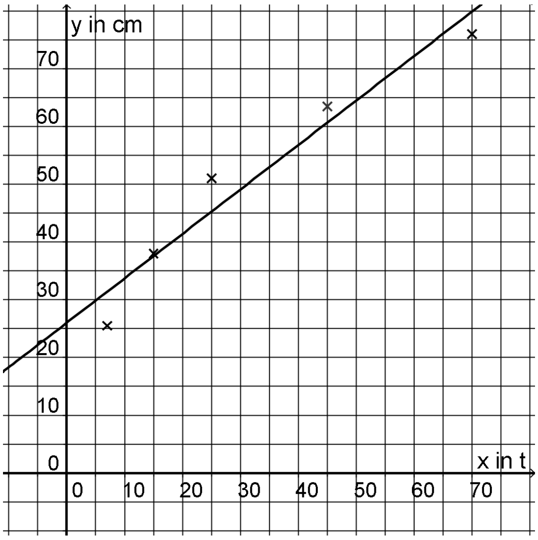
Nr.		Punkte
1a	$f'(x)=\frac{9}{32}x^2-\frac{9}{8}x \qquad f''(x)=\frac{9}{16}x-\frac{9}{8}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$ Damit ergeben sich wegen $f''(0)=-\frac{9}{8}<0$ ein Hochpunkt $H(0\|3)$ und wegen $f''(4)=\frac{9}{8}>0$ ein Tiefpunkt $T(4\|0)$.	5
1b	$f''(x)=\frac{9}{16}x-\frac{9}{8}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$ Wegen $f'''(x)=\frac{9}{16}$ ist $f'''(2)\neq 0$. Damit erhält man einen Wendepunkt $W\left(2\middle\|\frac{3}{2}\right)$.	2
	Die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist eine lineare Funktion, deren Graph nicht parallel zur x-Achse verläuft. Daher besitzt die zweite Ableitung genau eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel. Damit folgt die Behauptung.	2
1c	Aus $m=f'(2)=-\frac{9}{8}$ und $t(2)=f(2)=\frac{3}{2}$ ergibt sich die Tangentengleichung $t(x)=-\frac{9}{8}x+\frac{15}{4}$. Die Tangente schneidet die Achsen in $S_1\left(0\middle\|\frac{15}{4}\right)$ und $S_2\left(\frac{10}{3}\middle\|0\right)$. Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks erhält man damit: $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{10}{3}=6{,}25$ FE.	4
1d	Der Nachweis, dass die eingezeichnete Gerade nicht mit der Wendetangente übereinstimmt, erfolgt z.B. durch Vergleich der Steigungen oder der y-Achsenabschnitte der beiden Geraden.	2
1e	Die Lösungen sollten entsprechend den Vorkenntnissen des Kurses bepunktet werden. Eine Lösung ergibt sich zum Beispiel durch die Punktsymmetrie: Die Größe der gesuchten Fläche stimmt mit der Größe des Dreiecks überein, das durch die in d) eingezeichnete Gerade im 1. Quadranten entsteht. Es ergibt sich damit ein Flächeninhalt von 6 FE. Weitere Lösungsverfahren sind denkbar, z.B. anschauliche Argumentation, Näherungsverfahren.	3
	Summe:	**18**

2a	Um 5 Uhr sind 21 Stunden seit dem Beobachtungsbeginn um 8 Uhr vergangen. $A(21) = -0{,}005 \cdot 21^3 + 0{,}2 \cdot 21^2 + 0{,}9 \cdot 21 + 1 = 61{,}795$ Im Modell ergibt sich um 5 Uhr nachts eine Fläche von ca. 62 cm^2.	2
2b	$v_d = \dfrac{A(21) - A(0)}{21 - 0} = 2{,}895$ Im Modell ergibt sich eine durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit v_d zwischen Beobachtungsbeginn und 5 Uhr nachts von ca. 2,9 $\dfrac{\text{cm}^2}{\text{h}}$.	3
2c	Gesucht ist die Zeit t, für die gilt: $A'(t) = A'(0)$. Wegen $A'(t) = -0{,}015t^2 + 0{,}4t + 0{,}9$ und $A'(0) = 0{,}9$ folgt: $-0{,}015t^2 + 0{,}4t + 0{,}9 = 0{,}9 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 26\frac{2}{3}$. Nach 26 Stunden und 40 Minuten, d.h. um 10:40 Uhr, entspricht die Wachstumsgeschwindigkeit im Modell wieder der Anfangsgeschwindigkeit von 8 Uhr.	3
	Zur Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst, ist das relative Maximum von $A'(t)$ zu bestimmen. $A''(t) = -0{,}03t + 0{,}4 \qquad A''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 13\frac{1}{3}$ $A'''\left(13\frac{1}{3}\right) = -0{,}03 < 0$ Nach 13 Stunden und 20 Minuten, d.h. um 21:20 Uhr, wächst die mit Bakterien bedeckte Fläche im Modell am schnellsten.	3
	Zur Bestimmung des Zeitpunktes, bis zu dem im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche wächst, muss das Maximum der Funktion A bestimmt werden. $A'(t) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \cdot (40 - \sqrt{2140}) \vee t = \frac{1}{3} \cdot (40 + \sqrt{2140})$ Wegen $A''\left(\frac{1}{3} \cdot (40 + \sqrt{2140})\right) < 0$ liegt in $t = \frac{1}{3} \cdot (40 + \sqrt{2140}) \approx 28{,}75$ ein Maximum vor. Nach dem Beobachtungsbeginn um 8 Uhr wächst im Modell die Fläche ca. 28 Stunden und 45 Minuten, d.h. bis ca. 12:45 Uhr am folgenden Tag.	3
2d	Die Schüler können z. B. auf folgende Aspekte hinweisen: Das Modell erfasst die Messwerte nach dem Maximum um 12:45 Uhr nicht mehr richtig. Die graphische Darstellung zeigt, dass die Messwerte nach diesem Zeitpunkt nicht abnehmen und sogar noch geringfügig zu wachsen scheinen. Im Modell erreicht die Ausdehnung der bedeckten Fläche um ca. 12:45 Uhr am zweiten Tag ihren größten Wert und fällt danach schnell ab. Die Bakterienfläche nimmt schließlich sogar negative Werte an, was im Kontext keinen Sinn ergibt. „Ausreißer“ (z. B. der Meßwert um 2.00 Uhr) können durch diese ganzrationale Funktion nicht erfasst werden.	2
	Summe:	**16**

3a	Geradengleichung: $g_1 : y = x$ Kreisgleichung: $k : (x-10)^2 + (y-5)^2 = 25$ Mittels Einsetzungsverfahren folgt: $(x-10)^2 + (x-5)^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 - 30x + 125 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$ $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 10$ Schnittpunkte sind $A_1\left(5\middle|5\right)$ und $B_1\left(10\middle|10\right)$.	2 4
3b	Durch Einsetzen der Koordinaten von T in die Gleichung von k ergibt sich $(6-10)^2 + (8-5)^2 = 25$. T liegt also auf dem Kreis. Nachweis, dass $\measuredangle OTM$ ein rechter Winkel ist: <u>1. Möglichkeit</u>: Die Gerade g_2 durch O und T hat die Steigung $m_{OT} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Die Gerade durch M und T hat die Steigung $m_{MT} = \frac{5-8}{10-6} = -\frac{3}{4}$ Wegen $m_{OT} \cdot m_{TM} = -1$ ist $\measuredangle OTM$ ein rechter Winkel. <u>2. Möglichkeit</u>: Die Gerade $g_2 : y = \frac{4}{3}x$ hat keinen zweiten Schnittpunkt mit k, ist also eine Tangente. Dies erkennt man nach einer Rechnung wie unter a), z. B. mit Hilfe der 2. binomischen Formel. $(x-10)^2 + (\frac{4}{3}x - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{3}x + 125 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0$ $\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 6$ <u>3. Möglichkeit</u>: Im Dreieck OMT gilt $\overline{OT}^2 + \overline{MT}^2 = 100 + 25 = 125 = \overline{OM}^2$. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist $\measuredangle OTM$ ein rechter Winkel.	1 3
3c	Für die Länge der Sekantenabschnitte ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras: $\overline{OA_1} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$ und $\overline{OB_1} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$. Produkt der Sekantenabschnitte: $\overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{200} = \sqrt{10000} = 100$.	3
3d	Folgende Überlegung zeigt, dass die Erweiterung auf die Tangente möglich ist: Für die Länge des Tangentenabschnittes ergibt sich $\overline{OT} = 10$. Wenn man nun von einem doppelten Schnittpunkt ausgeht, so gilt: $\overline{OT} \cdot \overline{OT} = 100$. Folgende weitergehende Überlegung, die aus der Differentialrechnung erwachsen kann, zeigt, dass diese Erweiterung auch sinnvoll ist: Bewegt man die Sekante g_1 im Gegenuhrzeigersinn, so lässt sie sich beliebig der Tangente g_2 annähern, wobei das Produkt der Sekantenabschnitte unverändert gleich 100 ist. Die Schnittpunkte rücken immer weiter zusammen und nähern sich „beliebig dicht an den Punkt T an“.	3
	Summe:	**16**

Anlage zur Lösung von Aufgabe 3



4a	Schwerpunkt: $\overline{x} = (7\,t + 15\,t + 25\,t + 45\,t + 70\,t) : 5 = 32{,}4\,t$ $\overline{y} = (25{,}5\,cm + 38\,cm + 51\,cm + 63{,}5\,cm + 76\,cm) : 5 = 50{,}8\,cm$ Der Schwerpunkt ist $S(32{,}4 \mid 50{,}8)$. Zeichnung der Regressionsgeraden:  	2 1
4b	Der Schätzwert für die „sichere" Eisdicke bei einer Belastung von 40 t ergibt sich hier durch Einsetzen in die Regressionsgerade: $y = 0{,}77 \cdot 40 + 26 = 56{,}8$. Der Schätzwert beträgt also 56,8 cm. Man kann annehmen, dass die tatsächliche „sichere" Eisdicke größer ist als der Schätzwert 56,8 cm, denn die y-Werte der Datenpunkte rechts und links von x = 40 liegen oberhalb der Regressionsgeraden.	3
4c	Der Schätzwert ergibt sich durch Einsetzen in die Wurzelfunktion: $55 = 9{,}08 \cdot \sqrt{x}$, also ist $x = \left(\frac{55}{9{,}08}\right)^2 \approx 36{,}7$. Bei einer Eisdicke von 55 cm ergibt sich eine mögliche Belastung von 36,7 t.	2

<table>
<tr>
<td>4d</td>
<td>
Um zu ermitteln, welche der beiden Funktionen besser zu den ersten drei Datenpunkten passt, können die Schüler zum Beispiel die absoluten oder die quadratischen vertikalen Abweichungen berechnen.
Absolute Abweichungen (ggf. gerundet):
<table>
<tr><th>x in t</th><th>y in cm</th><th>$y = 0{,}77x + 26$</th><th>abs. Abw.</th><th>$y = 9{,}08 \cdot \sqrt{x}$</th><th>abs. Abw.</th></tr>
<tr><td>7</td><td>25,5</td><td>31,39</td><td>5,89</td><td>24,02</td><td>1,48</td></tr>
<tr><td>15</td><td>38</td><td>37,55</td><td>0,45</td><td>35,17</td><td>2,83</td></tr>
<tr><td>25</td><td>51</td><td>45,25</td><td>5,75</td><td>45,4</td><td>5,60</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td></td><td></td><td>12,09</td><td></td><td>9,91</td></tr>
</table>
Quadratische Abweichungen (ggf. gerundet):
<table>
<tr><th>x in t</th><th>y in cm</th><th>$y = 0{,}77x + 26$</th><th>quad. Abw.</th><th>$y = 9{,}08 \cdot \sqrt{x}$</th><th>abs. Abw.</th></tr>
<tr><td>7</td><td>25,5</td><td>31,39</td><td>34,69</td><td>24,02</td><td>2,18</td></tr>
<tr><td>15</td><td>38</td><td>37,55</td><td>0,20</td><td>35,17</td><td>8,03</td></tr>
<tr><td>25</td><td>51</td><td>45,25</td><td>33,06</td><td>45,4</td><td>31,36</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td></td><td></td><td>67,96</td><td></td><td>41,57</td></tr>
</table>
Indem man die jeweiligen Summen vergleicht, erkennt man, dass der Graph der Wurzelfunktion besser zu den ersten drei Datenpunkten passt.
Da die Aufgabe offen gestellt wurde, müssen auch andere sinnvolle Lösungsmöglichkeiten, die alle drei Datenpunkte und Eigenschaften der beiden Funktionen aufgreifen, zur Höchstpunktzahl der Teilaufgabe führen.
</td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td>4e</td>
<td>
Sinnvolle Schülerantworten sind z.B.:
„Wenn ich die Datenpunkte verbinde, erhalte ich eine Kurve, die dem Graphen der Wurzelfunktion ähnlich sieht. Daher nehme ich an, dass die Wurzelfunktion besser geeignet ist, um die „sichere“ Eisdicke bei größeren Belastungen als 70 t zu schätzen.“
„Die „Steigung“ zwischen zwei Datenpunkten wird geringer, je weiter die Punkte im Koordinatensystem rechts liegen. Diese Eigenschaft haben auch Punkte auf dem Graphen der Wurzelfunktion. Daher nehme ich an...“
„Für große x liegt der Graph der linearen Funktion oberhalb des Graphen der Wurzelfunktion. Bei der linearen Funktion wird also einer bestimmten Belastung eine höhere Eisdicke zugeordnet. Wenn man sicher sein will, dass man nicht einbricht, sollte man also mit der linearen Funktion schätzen.“
</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summe:</td>
<td>16</td>
</tr>
</table>