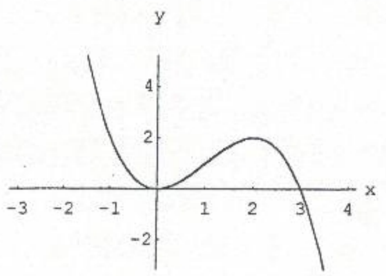
Lösungen der Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1



Graph von f

b) (1) Die Reaktion ist am stärksten für den Dosiswert $x = 2$ (also am Hochpunkt).

(2) $R''(x) = 3 - 3x = 0$ liefert $x = 1$

$R'''(x) = -3$

Wegen $R'''(1) < 0$ ist die Empfindlichkeit R' für $x = 1$ maximal.

Aufgabe 2:

a. Skizze siehe unten

b. Der gesuchte Bereich ist der zwischen den Nullstellen von f. Es gilt:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 24x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(-x+12) = 0 \Leftrightarrow x=0$ oder $-x + 12 = 0$.
Der gesuchte Bereich ist das abgeschlossene Intervall [0; 12].

c. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle x_E ist: f >Â;(x_E) = 0.
Rechnung:
f >Â;(x) = 0 $\Leftrightarrow -6x^2 + 48x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle x_E ist: f >Â;(x_E) = 0 $\wedge$ f >Â;>Â;(x_E) $\neq$ 0.
Rechnung: f >Â;>Â;(x) = -12x + 48 $\Rightarrow$ f´>Â;>Â;(8) = -48 < 0
An der Stelle $x_E = 8$ liegt ein lokales Maximum vom Wert f(8) = 512 vor.

Da die Funktion f an den Rändern des Intervalls [0; 12] jeweils den Funktionswert 0 hat, handelt es sich bezogen auf diesen Bereich um ein <u>absolutes</u> Maximum.

d. Die mittlere Änderungsrate von f über einem Intervall [a; b] $\subseteq$ [0 ; 12],
also der Term (f(b)-f(a)) / (b-a), beschreibt in diesem Zusammenhang die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der die Wassermenge in der Zeit von a bis b zunimmt / abnimmt.
Die lokale Änderungsrate , also der Wert f >Â;(x_0), beschreibt hier die Momentangeschwindigkeit, mit der die Wassermenge zum Zeitpunkt x_0 zunimmt / abnimmt.

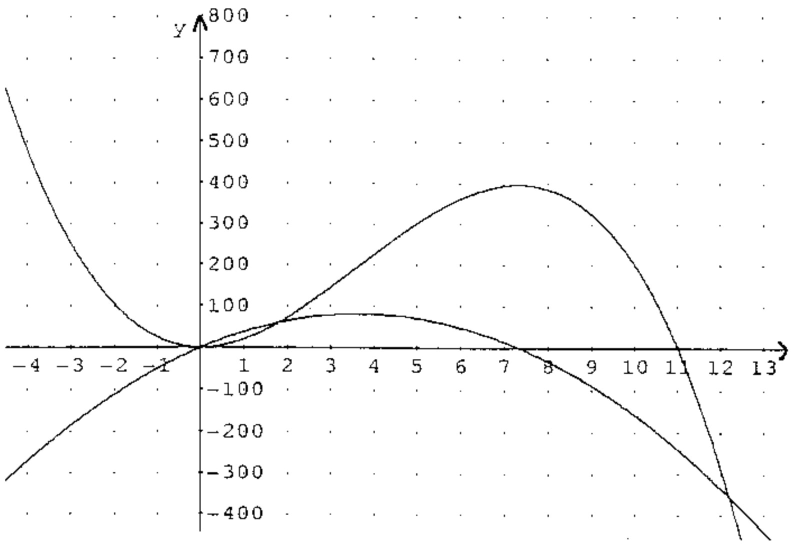
e. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes an einer Stelle x_W ist: f >Â;->Â;(x_W) = 0.
Rechnung:
f >Â;>Â;(x) = 0 $\Leftrightarrow$ -12x+48 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 4

Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes an einer Stelle x_W ist: f >Â;->Â;(x_W) = 0 $\wedge$ f >Â;>Â;>Â;(x_W) $\neq$ 0.
Rechnung: f >Â;>Â;>Â;(x) = -12 $\Rightarrow$ f >Â;>Â;>Â;(4) = -12 $\neq$ 0
An der Stelle x_W = 4 liegt ein Wendepunkt vor.

Es handelt sich um den Punkt (4; f(4)) = (4; 256)

f. Die Wendestelle ist in diesem Zusammenhang derjenige Zeitpunkt, an welchem die Wassermenge im Pumpspeicherwerk mit der größten Geschwindigkeit zunimmt / abnimmt.

Zeichnung zur Aufgabe 2a):



Aufgabe 3

3a	$f'(x) = -3x^2 + 60x - 225$ $f'(9) = 72$ Mögliche Antworten sind z.B. - zu diesem Zeitpunkt steigt die Anzahl der Surfer um 72 Surfer pro Stunde - die lokale Änderungsrate beträgt 72 Surfer pro Stunde. Innermathematische Formulierungen wie z.B. " $f'(9)$ gibt die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 9$ an" berücksichtigen den Kontext nicht angemessen.
3b	Ermittlung des durchschnittlichen Spitzenwertes: Wenn x relative Extremstelle ist, dann muss gelten: $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow -3x^2 + 60x - 225 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$ $\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 15$ Eine hinr. Bedingung für ein relatives Maximum ist: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$. Es ist: $f''(x) = -6x + 60$. Wegen $f''(5) > 0$ und $f''(15) < 0$ ergibt sich für $x = 15$ ein relatives Maximum mit $f(15) = 520$. Der Randwert $f(4)$ liegt deutlich darunter. Als Spitzenwert ergeben sich also durchschnittlich 520 Surfer.
3c	Der Spitzenwert lag am 31.Mai mit 805 Surfern um 285 über dem durchschnittlichen Spitzenwert von 520. $p = \frac{285}{520} 100\% \approx 54{,}81\%$ Damit lag der Spitzenwert am 31. Mai um ca 55% über dem durchschnittlichen Spitzenwert.

3d	Es sind unterschiedliche Prognosen möglich: (a) Annahme: An diesem bestimmten Tag wird die Zunahme von 9h bis 10h dem durchschnittlichen Zuwachs entsprechen. Prognose: $240 + (f(10) - f(9) = 240 + (270 - 196) = 314$ (b) Annahme: An diesem bestimmten Tag entspricht die lokale Veränderungsrate um 9h der durchschnittlichen lokalen Änderungsrate um 9h. Prognose: $240 + f'(9) \cdot (10 - 9) = 240 + 72 = 312$ (c) Annahme: An diesem Tag wird sich um 10h die gleiche prozentuale Zunahme gegenüber der durchschnittlichen Surferzahl um 10h ergeben, wie sie sich an diesem Tag bereits um 9h ergeben hat. Dann ist. $\frac{240}{f(9)} = \frac{x}{f(10)}$ Daraus folgt die Prognose: $x = \frac{240 \cdot 270}{196} \approx 331$ Zur Bewertung: Falls ein Schüler mehr als eine Prognose abgibt und sie begründet und ggfs. die Prognosen gegeneinander abwägt, kann er bis zu zwei Zusatzpunkte erhalten.

Aufgabe 4

a)	Die Produktion bis 13 Uhr wird angegeben durch $v(7)$. Damit gilt $v(7) = -7^3 + 20 \cdot 7^2 = 637$, d.h. der Baum produziert bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff. Die durchschnittliche Produktion pro Stunde in dem angegebenen Zeitraum wird bestimmt durch $\frac{v(11)-v(7)}{11-7} = \frac{1089-637}{4} = 113$, d.h. die durchschnittliche Produktion beträgt zwischen 13 Uhr und 17 Uhr 113 Liter pro Stunde.
b)	Für die Produktion in den angegebenen Zeiträumen gilt: $v(9) - v(7) = 254$ bzw. $v(11) - v(9) = 198$. Damit ergibt sich : $P_{diff} = \frac{254-198}{254} = \frac{56}{254} \approx 0{,}2204$, d.h. die Produktion hat sich um ca 22,0 % verringert.
c)	$v'(t) = -3t^2 + 40t \Rightarrow v'(5) = 125$ (Liter pro Stunde). Mögliche Erläuterung : Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Produktion 125 Liter pro Stunde. Nicht akzeptiert werden sollten innermathematische Formulierungen wie: "Die Tangente hat die Steigung 125." o.ä..
d)	Mögliche begründete Vermutungen über den gesuchten Zeitpunkt: - aus dem Kontext : höchste Lichtintensität gegen ca. 12 Uhr. - aus dem Graphen: stärkste Steigung am Wendepunkt etwa zwischen $t = 6$ und $t = 7$. Erläuterung der Berechnung mit dem im Unterricht behandelten Verfahren zur Bestimmung des Wendepunktes (z.B. notwendige Bedingung $v''(t_w) = 0$; hinreichende Bedingung $v''(t_w) = 0$ und $v'''(t_w) \neq 0$). Eine Berechnung liefert als gesuchten Zeitpunkt $t_w = \frac{20}{3}$, d.h. die maximale Produktion wird um 12.40 Uhr erreicht.

Aufgabe 5

Vorbemerkung: In Kontextaufgaben ("Anwendungsaufgaben") wie der Aufgabe 2 müssen im Allgemeinen komplexe Sachverhalte vereinfacht dargestellt werden, damit sie von den Schülern bearbeitet werden können. Zum Kontext der "Anaeroben Schwelle" findet sich eine ausführliche Darstellung beispielsweise in:
Heck, Hermann: Energiestoffwechsel und medizinische Leistungsdiagnostik / Hrsg.: Trainerakademie Köln e.V./ ISBN 3-7780-8081-4

a) Wegen $f(16) = 6{,}872$ beträgt die Laktatkonzentration bei einer Geschwindigkeit von $16\frac{km}{h}$ 6,872 mmol pro Liter Blut.

b) Man entnimmt der Zeichnung den Schnittpunkt zwischen der Parallelen zur x- Achse durch den Punkt $P(0/4)$ und dem Graphen von f. Daraus ergibt sich, dass die anaerobe Schwelle etwa bei einer Geschwindigkeit von $14{,}5\frac{km}{h}$ erreicht wird.

c) Es gilt: $f'(x) = 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9$. Ansatz:
$f'(x) = 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{102}{5}x + \frac{800}{9} = 0$. Es folgt: $x \approx 14{,}1 \vee x \approx 6{,}3$
Nach der Definition von Simon ergibt sich als Wert für die anaerobe Schwelle eine Geschwindigkeit von etwa $14{,}1\frac{km}{h}$. $6{,}3\frac{km}{h}$ entfällt als Lösung, da es außerhalb des angegebenen Bereichs liegt.
Anmerkung: $6{,}3\frac{km}{h}$ wäre im Übrigen auch keine sinnvolle Lösung. Bei diesem Wert handelt es sich um die Geschwindigkeit eines zügig gehenden Fußgängers. Ein Sportler wird dabei nicht bereits die anaerobe Schwelle erreichen.

d) Zu bestimmen sind die Abszissen von Hoch- und Tiefpunkt des Graphen.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 20{,}4x + 100 = 0$. Es folgt: $x \approx 8{,}19 \vee x \approx 12{,}21$
Aus $f''(x) = 0{,}18x - 1{,}836$ ergibt sich: $f''(8{,}19) < 0$ und $f''(12{,}21) > 0$. Die Laktatkonzentration nimmt also im Bereich von ca. $8{,}19\frac{km}{h}$ bis $12{,}21\frac{km}{h}$ ab. Eleganter ist der Ansatz: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0{,}09x^2 - 1{,}836x + 9 < 0 \Leftrightarrow \ldots$ Dies führt zu: $8{,}19 < x < 12{,}21$.

e) Gesucht ist die Wendestelle der Funktion f. Falls den Schülerinnen und Schülern das Symmetrieverhalten einer kubischen Funktion bekannt ist, kann der gesuchte Wert von $10{,}2\frac{km}{h}$ direkt aus den Werten aus Teil d) errechnet werden. Sonst gilt:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}18x - 1{,}836 = 0 \Leftrightarrow x = 10{,}2$ und $f'''(x) = 0{,}18 \neq 0$ für alle x.

f) Auf Grund der Informationen im Text gibt es zwei Möglichkeiten, den Trainingszustand zu vergleichen: Nach dem Verfahren aus b) lässt sich deutlich sehen, dass der Sportler B besser trainiert ist. Die Zeichnung liefert einen Wert von etwa $16{,}5\frac{km}{h}$ für die anaerobe Schwelle.
Wegen des fehlenden Funktionsterm lässt sich die anaerobe Schwelle nach der Definition von Simon nicht berechnen. Aber eine zeichnerische Lösung durch Eintragen einer Tangente etwa über Parallelverschiebung ergibt auch hier einen deutlich höheren Wert als bei Sportler A (Es reicht eine Lösung!).

Aufgabe 6

$f(x) = 0{,}125x^3 - 0{,}75x^2 + 4$

Aufgabe 7

a) Wählt man den tiefsten Punkt der Fahrbahn als Koordinatenursprung, so haben die drei Parabeln die Gleichungen

$y = ax^2, \quad y = -a(x-200)^2 + 32 \quad$ und $\quad y = -a(x+200)^2 + 32.$

Aus Symmetriegründen sind die Schnittpunkte $P_1(-100|16)$ und $P_2(100|16)$. Setzt man die Koordinaten eines Schnittpunkts in eine der Parabelgleichungen ein, so erhält man $a = \frac{16}{100^2} = 0,0016.$

b) Die Ableitungen der drei Funktionen sind lineare Funktionen; daher erreichen die Steigungen ihre Extremwerte an den Randstellen des jeweiligen Definitionsbereichs, also bei $x_1 = -100$ und bei $x_2 = 100$. Sie betragen $m_1 = -0,32$ und $m_2 = 0,32$.

c) $x_1 = -200 + 50\sqrt{3} \approx -113,4$ und $x_2 = 200 - 50\sqrt{3} \approx 113,4.$

d) Die drei Parabeln haben die Gleichungen

$y = ax^2, \quad y = -2a(x-200)^2 + 32 \quad$ und $\quad y = -2a(x+200)^2 + 32.$

Schnittpunkte: $P_1(-\frac{400}{3}|\frac{64}{3})$ und $P_2(\frac{400}{3}|\frac{64}{3})$.

Größte Steigungen: $m_1 = -0,32$ und $m_2 = 0,32$.

Wasserspiegel erreicht bei $x_1 = -100\sqrt{\frac{5}{3}} \approx -129,1$ und $x_2 = 100\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 129,1.$

Aufgabe 8

a) $v(t) = h'(t) = v_0 - 9,81t \quad \Rightarrow \quad v(0) = v_0$

b) $t_{max} = v_0 : 9,81 \quad \Rightarrow \quad h_{max} = {v_0}^2 : 19,62 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 10,85\ (\frac{m}{s})$

c) Herren: $v_0 = 6,93\ (\frac{m}{s})$; Damen: $v_0 = 6,40\ (\frac{m}{s})$

d) Während des Flugs stößt sich der Springer zusätzlich am Stab ab.

Aufgabe 9

h hat die Nullstellen $t = 0$ und $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

$\Rightarrow \quad$ Wurfweite: $\quad w(\alpha) = \dfrac{2{v_0}^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{{v_0}^2}{g}\sin 2\alpha.$