



# Vergleichsklausuren

## NRW

Vorwort.....	1
Konkretisierung der fachlichen Rahmenbedingungen 2018.....	2
Klausur 2017: Durchschnittsalter einer Bevölkerung im Land A.....	4
Klausur 2016: Sonnenhöhenwinkel.....	10
Klausur 2015: Wassermenge in einem Wasserturm.....	18

## Vorwort

Die zentralen Vergleichsklausuren sind in einer Zusammenfassung bis zum Jahr 2000 gesammelt und unter [walther-mathematik.de](http://walther-mathematik.de) in einem Reader zusammengefasst. Seit 2015 gibt es **hilfsmittelfreie** Aufgabenteile in den Klausuren. Deshalb beginnt diese Zusammenfassung im Jahr 2015, weil Klausuren aus den Vorjahren nicht mehr die optimale Vorbereitung bieten.

Viel Erfolg bei den Vorbereitungen wünscht

Michael Walther



## Konkretisierung der fachlichen Rahmenbedingungen für die Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2018 Mathematik

### Curriculare Grundlage

Aktueller Kernlehrplan (KLP) für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen

### Aufgaben

Die Klausur umfasst zwei Teile. Eine Aufgabenauswahl ist nicht vorgesehen. In Teil B werden für die Bearbeitung mit GTR bzw. CAS die gleichen Aufgaben gestellt.

Aufgabenteil	Aufgabentyp	Aufgaben	Dauer
Teil A	Aufgaben ohne Hilfsmittel (ohne Taschenrechner, ohne Formelsammlung)	Aufgabe 1 Aufgabe 2	max. 20 Minuten
Teil B	Aufgaben mit Hilfsmitteln (für GTR oder CAS)	Aufgabe 3 Aufgabe 4	min. 80 Minuten
		<b>4</b>	<b>100 Minuten</b>

Die Bewertungseinheiten entsprechen den Zeitanteilen.

### Organisation

Zu Beginn der Klausur wird Teil A (Aufgaben ohne Hilfsmittel) bearbeitet; die Zeit beträgt maximal 20 Minuten. Wenn die Schülerin oder der Schüler die Aufgaben und die Lösungen abgegeben hat, werden ihr oder ihm die Aufgaben von Teil B sowie die dafür zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) ausgehändigt.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Teile beträgt zusammen 100 Minuten. Für Schülerinnen oder Schüler, die die Aufgaben und die Lösungen von Teil A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für Teil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Teilen der Klausur zugelassen.

### Teil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Bezug zu den Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten des KLP\*

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)	Inhaltsfeld Stochastik (S)
Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen	Mehrstufige Zufallsexperimente
Grundverständnis des Ableitungsbegriffs	Bedingte Wahrscheinlichkeiten
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei	

\* Die Verbindlichkeit des Kernlehrplans bleibt von diesen Schwerpunktsetzungen und Konkretisierungen für die Zentrale Klausur unberührt.

### Teil B – innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Bezug zu den Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten des KLP\*

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)
Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

\* Die Verbindlichkeit des Kernlehrplans bleibt von diesen Schwerpunktsetzungen und Konkretisierungen für die Zentrale Klausur unberührt.



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017 Mathematik

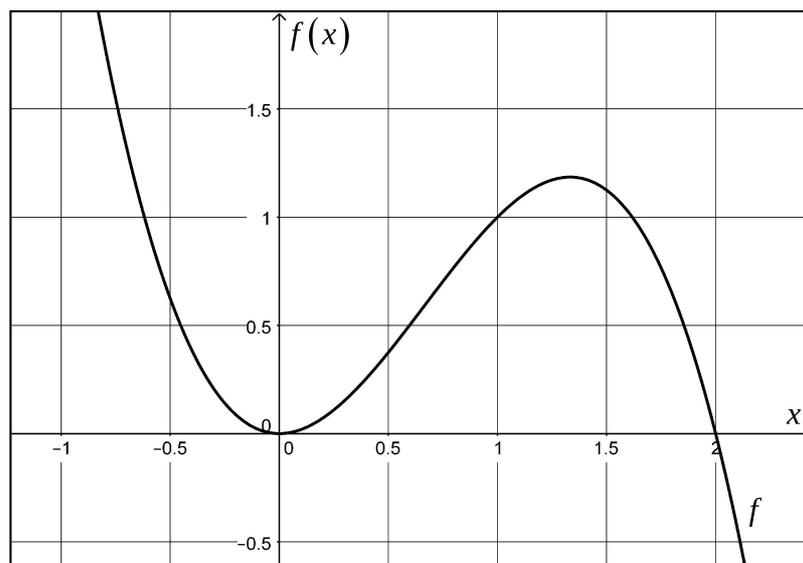
### Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

#### Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(x) = -x^3 + 2 \cdot x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von  $f$ .



Abbildung

a) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P(1|1)$ .

(4 Punkte)

b) (1) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes  $A$  an, in dem der Graph von  $f$  die Steigung Null hat.

(2) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes  $B(x_B|y_B)$  an, so dass die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_B$  negativ ist.

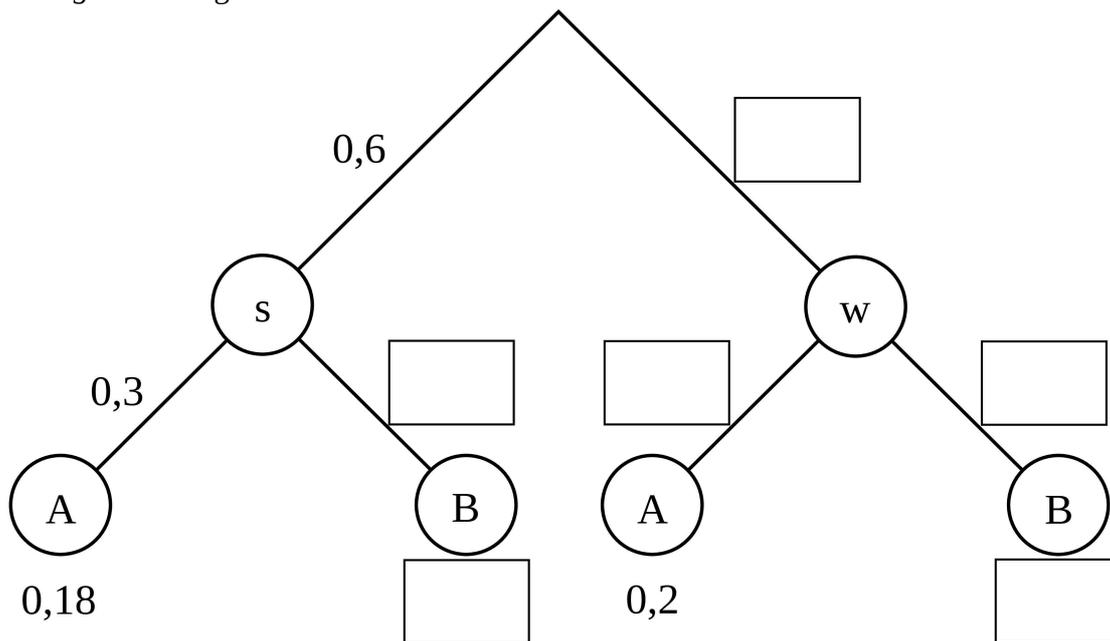
(1 + 1 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

## Aufgabe 2:

In einer Urne befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln, die zusätzlich entweder mit dem Buchstaben A oder dem Buchstaben B beschriftet sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Dieses Zufallsexperiment ist in dem folgenden unvollständig beschrifteten *Baumdiagramm* dargestellt.



*Baumdiagramm*

a) Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Rechtecken im Baumdiagramm an.

(4 Punkte)

b) Von der gezogenen Kugel wird zunächst nur bekannt gegeben, dass sie mit dem Buchstaben A beschriftet ist.

Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass es sich um eine schwarze Kugel handelt.

[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.]

(2 Punkte)

## Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017 Mathematik

---

### Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

#### Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 2, x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie (gerundet auf zwei Nachkommastellen) die Nullstellen der Funktion  $f$ .

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass  $x = 2$  eine lokale Minimalstelle der Funktion  $f$  ist.

(6 Punkte)

c) Ausgehend von der Funktion  $f$  ist eine neue Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{3}{2} \cdot x \\ &= \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + 2, x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben. Die *Abbildung 1* auf der folgenden Seite zeigt den Graphen von  $f$ , die *Abbildung 2* zeigt den Graphen von  $g$ .

Nennen Sie zwei Unterschiede der Graphen von  $f$  und  $g$ .



Name: \_\_\_\_\_

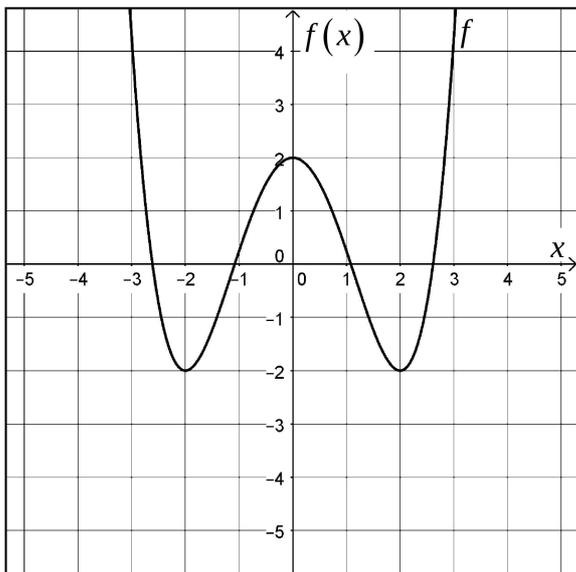


Abbildung 1

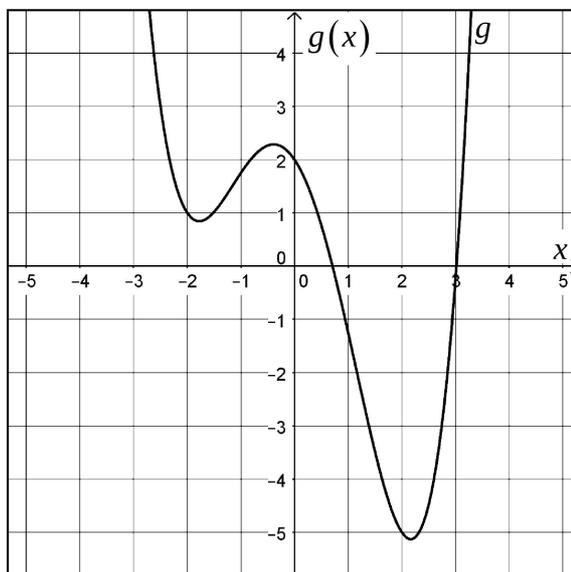


Abbildung 2

(4 Punkte)

- d) Die Gerade  $t: y = -\frac{3}{2} \cdot x - 2$  ist die Tangente an den Graphen von  $g$  im Punkt  $P(-2|1)$ .

[Hinweis: Ein Nachweis, dass  $t$  die Tangente an den Graphen von  $g$  im Punkt  $P$  ist, ist nicht erforderlich.]

- (1) Zeichnen Sie die Tangente  $t$  in die Abbildung 2 ein.
- (2) Zeigen Sie rechnerisch, dass  $t$  auch in einem weiteren Punkt  $Q$  Tangente an den Graphen von  $g$  ist.

(2 + 6 Punkte)

- e) Der Graph von  $g$  wird nun um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Der verschobene Graph wird anschließend so weit nach unten verschoben, bis die Gerade  $t$  in zwei Punkten Tangente an den neuen Graphen ist.

Geben Sie an, um wie viele Einheiten der nach rechts verschobene Graph dazu nach unten verschoben werden muss, und begründen Sie Ihre Angabe.

(3 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 4:

Ausgehend von den Daten aus einer Statistik der Vereinten Nationen kann das Durchschnittsalter der Bevölkerung in einem Land A mit Hilfe der Funktion  $a$  mit der Gleichung

$$a(t) = -0,00011 \cdot t^3 + 0,0186 \cdot t^2 - 0,538 \cdot t + 24, \quad t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.

Dabei ist  $t$  die Zeit in Jahren seit 1950 und  $a(t)$  das zugehörige Durchschnittsalter in Jahren. Mit der Funktion  $a$  können Prognosen bis zum Jahr 2030 erstellt werden.

Der Graph von  $a$  ist in *Abbildung 1* dargestellt.

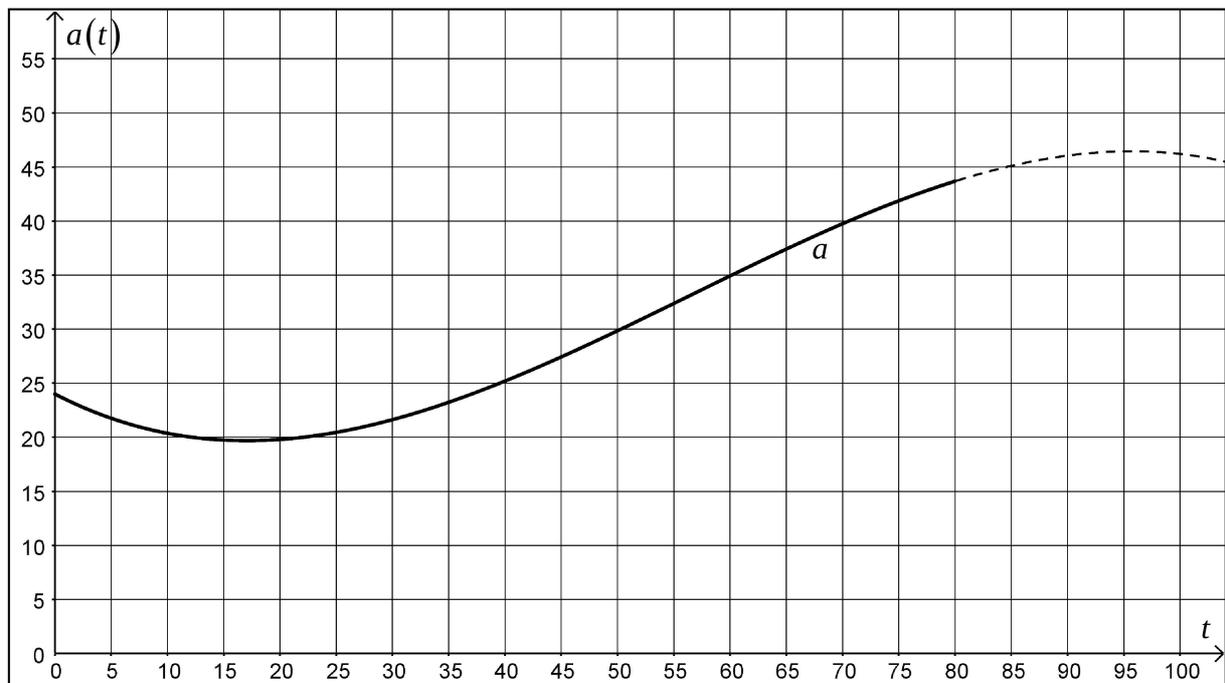


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 1950 ( $t = 0$ ) und den Prognosewert für das Jahr 2030 ( $t = 80$ ).

(4 Punkte)

b) Ermitteln Sie rechnerisch das niedrigste Durchschnittsalter der Bevölkerung im Zeitraum von 1950 bis 2030.

(8 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- c) Die Entwicklung des Durchschnittsalters der Bevölkerung im Zeitraum von 2030 bis 2050 soll durch die Tangente an den Graphen von  $a$  an der Stelle  $t = 80$  modelliert werden.

Ermitteln Sie in *Abbildung 1* zeichnerisch näherungsweise das Durchschnittsalter der Bevölkerung für das Jahr 2050.

(3 Punkte)

- d) In einem anderen Land B stimmte für das Jahr 1950 ( $t = 0$ ) das Durchschnittsalter der Bevölkerung nahezu mit dem Durchschnittsalter in dem Land A überein. Die Rate, mit der sich das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B ändert, ist in der folgenden *Abbildung 2* dargestellt.

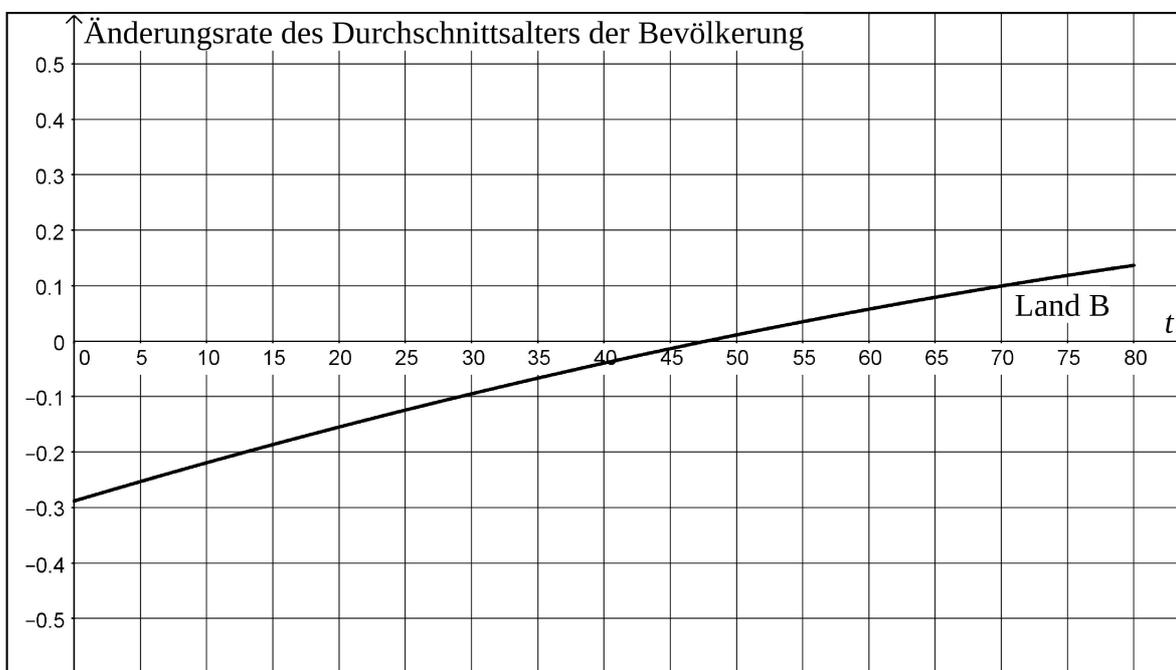


Abbildung 2

- (1) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land B wächst von 1950 bis 2030 durchgängig.

- (2) Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion  $a'$  in die *Abbildung 2* ein und geben Sie die Bedeutung von  $a'(t)$  im Sachzusammenhang an.

- (3) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Im Jahr 2020 wächst das Durchschnittsalter der Bevölkerung in dem Land A schneller als in dem Land B.

(2 + 5 + 2 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: \_\_\_\_\_

# **Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase**

## **2016**

### **Mathematik**

---

#### **Teil I: Hilfsmittelfreier Teil**

#### **Aufgabe 1: Analysis**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2$ .

*Untersuchen Sie die Funktion  $f$  rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.*

(6 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

## Aufgabe 2: Stochastik

Beim Spiel „Die wilde 8“ wird das Glücksrad mit den beiden Zahlen 0 und 8 (siehe *Abbildung*) zweimal gedreht.

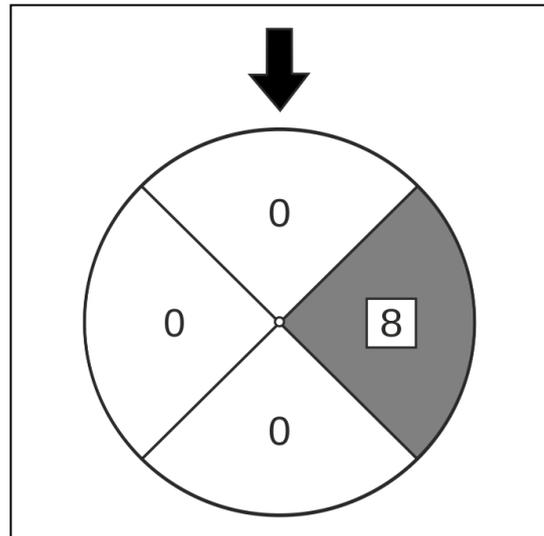
a) Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.

(2 Punkte)

b) Die beiden Zahlen in den Feldern, auf die jeweils der Pfeil zeigt, werden addiert.

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich

- die Summe 0 ergibt,
- die Summe 8 ergibt,
- die Summe 16 ergibt.



Abbildung

(2) Der Spieleinsatz für das zweimalige Drehen des Glücksrades beim Spiel „Die wilde 8“ beträgt 8€.

- Bei der Summe 0 gibt es keine Auszahlung, der Spieleinsatz ist verloren.
- Bei der Summe 8 wird der Spieleinsatz zurückgezahlt.
- Bei der Summe 16 wird der zehnfache Spieleinsatz ausgezahlt.

Der Spielleiter behauptet, das Spiel sei „fair“. Das heißt, dass ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.

(2 + 2 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016 Mathematik

### Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

#### Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{27}{16} \cdot x + 1$ .

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von  $f$ .

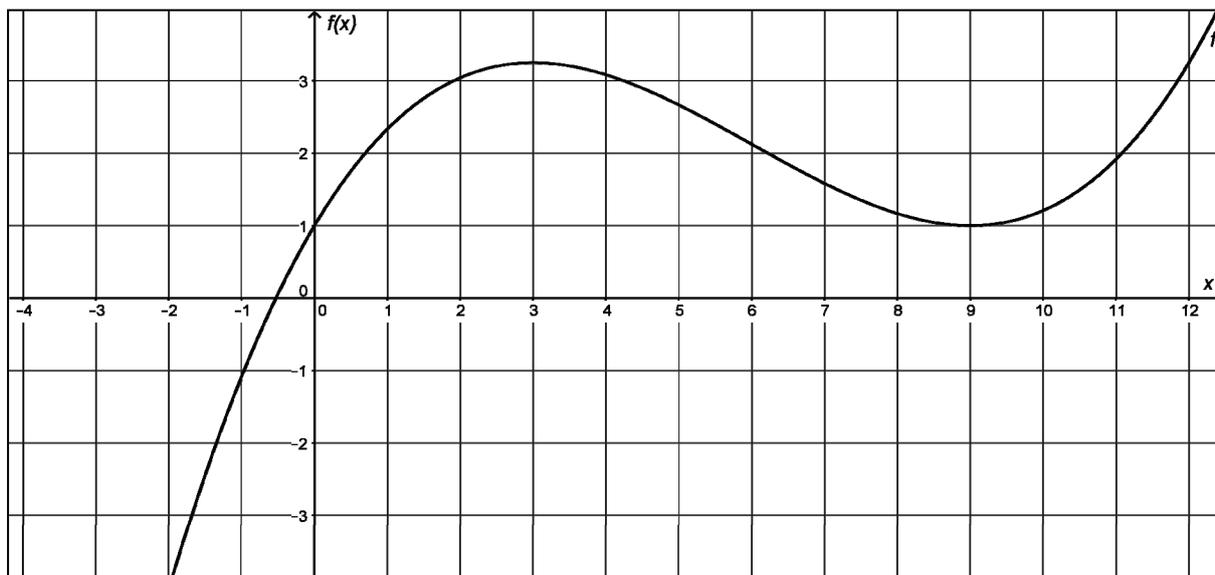


Abbildung 1

- a) (1) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden  $s$  durch die Punkte  $H\left(3 \mid \frac{13}{4}\right)$  und  $T(9 \mid 1)$ .

[Zwischenergebnis: Die Gerade  $s$  hat die Steigung  $-\frac{3}{8}$ .]

- (2) Es gibt zwei Stellen, an denen der Graph von  $f$  Tangenten hat, die parallel zur Geraden  $s$  verlaufen.

Ermitteln Sie diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

(5 + 4 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

b) Gegeben ist zusätzlich die Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{13}{4}.$$

(1) Zeichnen Sie den Graphen von  $g$  in die Abbildung 1 ein.

Der Graph der Funktion  $g$  geht durch eine Transformation aus dem Graphen der Funktion  $f$  hervor.

(2) Geben Sie diese Transformation an.

(3) Geben Sie eine Funktionsgleichung von  $g$  an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von  $g$  aus dem Graphen von  $f$  hervorgeht.

(4 + 2 + 2 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- c) Die folgenden *Abbildungen 2.1 bis 2.5* veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung  $f'(2)$  näherungsweise ermitteln kann.

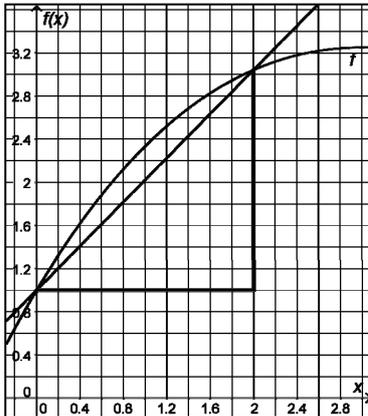


Abbildung 2.1

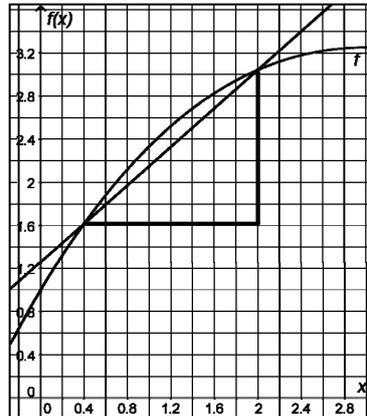


Abbildung 2.2

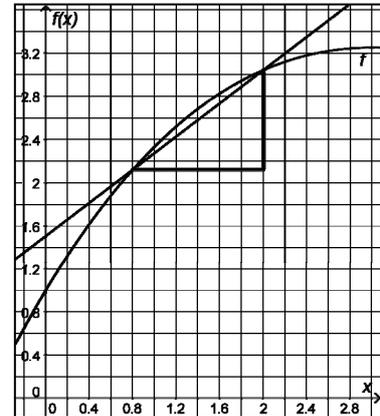


Abbildung 2.3

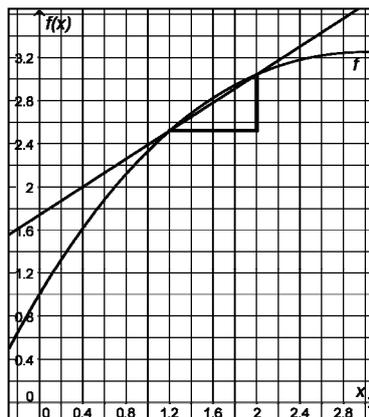


Abbildung 2.4

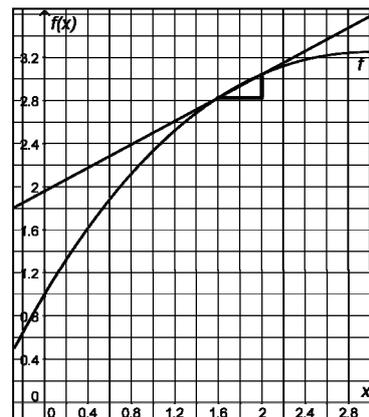


Abbildung 2.5

- (1) Geben Sie an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten  $\frac{f(2) - f(0,8)}{2 - 0,8}$  gehört.

- (2) Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung der Wert  $f'(2)$  hat.

Erklären Sie, warum in den *Abbildungen 2.1 bis 2.5* veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

(2 + 5 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Während seines Urlaubs im norwegischen Vardø beobachtet Heinz an einem Tag Anfang August die Sonne. Dabei misst er zu jeder vollen Stunde den Sonnenhöhenwinkel  $\alpha$  (siehe *Abbildung 1*), um so zu bestimmen, wie hoch die Sonne über dem Horizont steht.

Heinz trägt seine Winkelmessungen in ein Koordinatensystem ein (siehe *Abbildung 2*).

Dabei entspricht  $t = 0$  der Uhrzeit 12:00 Uhr mittags,  $t = 1$  entspricht 13:00 Uhr usw.

Der Uhrzeit 11:00 Uhr entspricht  $t = -1$  usw.

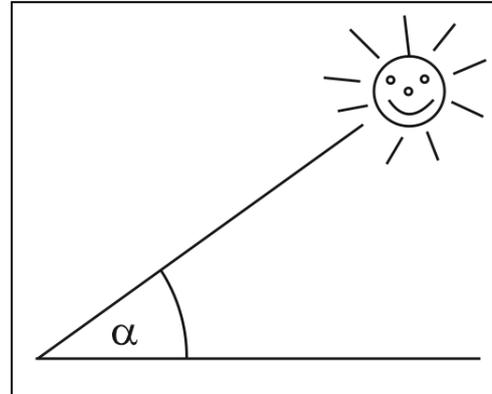


Abbildung 1

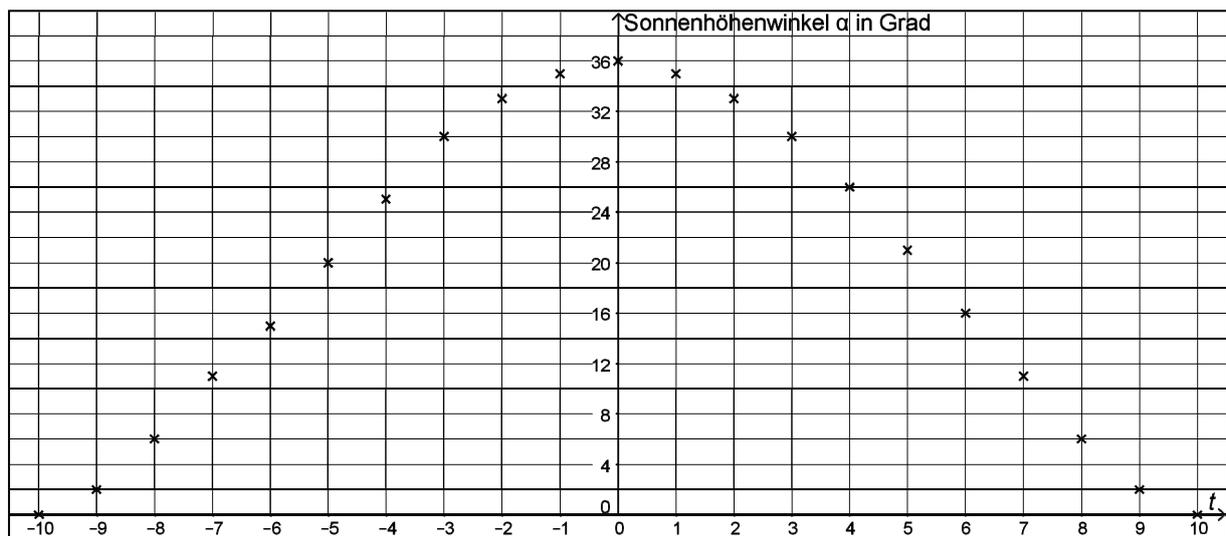


Abbildung 2

- a) (1) Geben Sie den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um 7:00 Uhr morgens misst.
- (2) Geben Sie an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens 30 Grad betragen.

(2 + 2 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

Heinz modelliert anhand seiner Daten den Sonnenhöhenwinkel im Laufe des Tages mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Er verwendet dazu für  $-10 \leq t \leq 10$  die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(t) = 0,0031 \cdot t^4 - 0,671 \cdot t^2 + 36,1 .$$

$f(t)$  beschreibt den Sonnenhöhenwinkel in Grad zu der durch  $t$  gegebenen Uhrzeit.

- b) Die Werte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion  $f$  ergeben, weichen etwas von den Werten aus der *Abbildung 2* ab.

*Berechnen Sie die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.*

(2 Punkte)

- c) Bei der Messung von Heinz erreicht die Sonne ihren höchsten Stand um 12:00 Uhr mittags (siehe *Abbildung 2*).

*Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion  $f$  die Sonne zu diesem Zeitpunkt ihren höchsten Stand erreicht.*

(7 Punkte)

- d) (1) *Weisen Sie nach, dass gilt:  $f'(-9) > f'(-2)$ .*

(2) *Interpretieren Sie diese Ungleichung im Sachzusammenhang.*

(2 + 2 Punkte)

An einem Tag Ende August beobachtet Heinz noch einmal die Sonne in Vardø. Um 04:00 Uhr morgens während des Sonnenaufgangs misst er den Sonnenhöhenwinkel 0 Grad, um 12:00 Uhr mittags ist der Sonnenhöhenwinkel mit 29 Grad maximal. Heinz möchte für diesen Tag den Sonnenhöhenwinkel mit einer ganzrationalen Funktion  $g$  modellieren.

- e) (1) *Skizzieren Sie in der *Abbildung 2* den Verlauf eines möglichen Graphen von  $g$ .*

(2) Für die Funktionsgleichung von  $g$  wählt Heinz den Ansatz:  $g(t) = a \cdot f(b \cdot t)$ .

*Ermitteln Sie für  $a$  und  $b$  jeweils einen zu seiner Messung passenden Wert.*

(3 + 4 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015 Mathematik

---

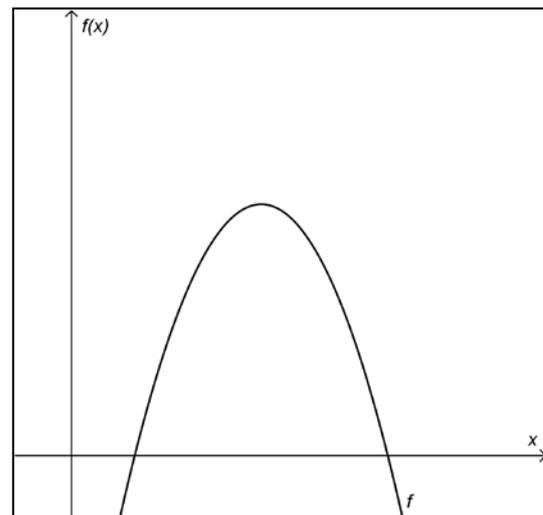
### Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

#### Aufgabe 1: Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 5.$$

- a) (1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$ .
- (2) Skizzieren Sie in die Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$ .



Abbildung

(2 + 2 Punkte)

- b) Ermitteln Sie, um wie viele Einheiten der Graph von  $f$  nach unten verschoben werden muss, so dass der verschobene Graph nur einen gemeinsamen Punkt mit der  $x$ -Achse besitzt.

(2 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

## Aufgabe 2: Stochastik

Eine Firma hat einen neuen Wirkstoff gegen Erkältungsbeschwerden entwickelt, dessen Wirksamkeit an erkälteten Versuchspersonen getestet wurde:

- 60 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette mit dem neuen Wirkstoff, die übrigen Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff.
- Nach einer Stunde trat insgesamt bei der Hälfte aller Versuchspersonen eine Linderung ein.
- 38 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff und verspürten keine Linderung.

a) Stellen Sie den oben beschriebenen Sachverhalt dar, indem Sie alle Prozentsätze ermitteln und in die folgende Tabelle eintragen.

	Linderung	keine Linderung	Gesamt
Tablette ohne Wirkstoff			
Tablette mit Wirkstoff			
Gesamt			

*Tabelle*

(3 Punkte)

b) Eine Versuchsperson verspürt eine Linderung.

*Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Tablette mit Wirkstoff erhalten hat.*

(3 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: \_\_\_\_\_

## Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

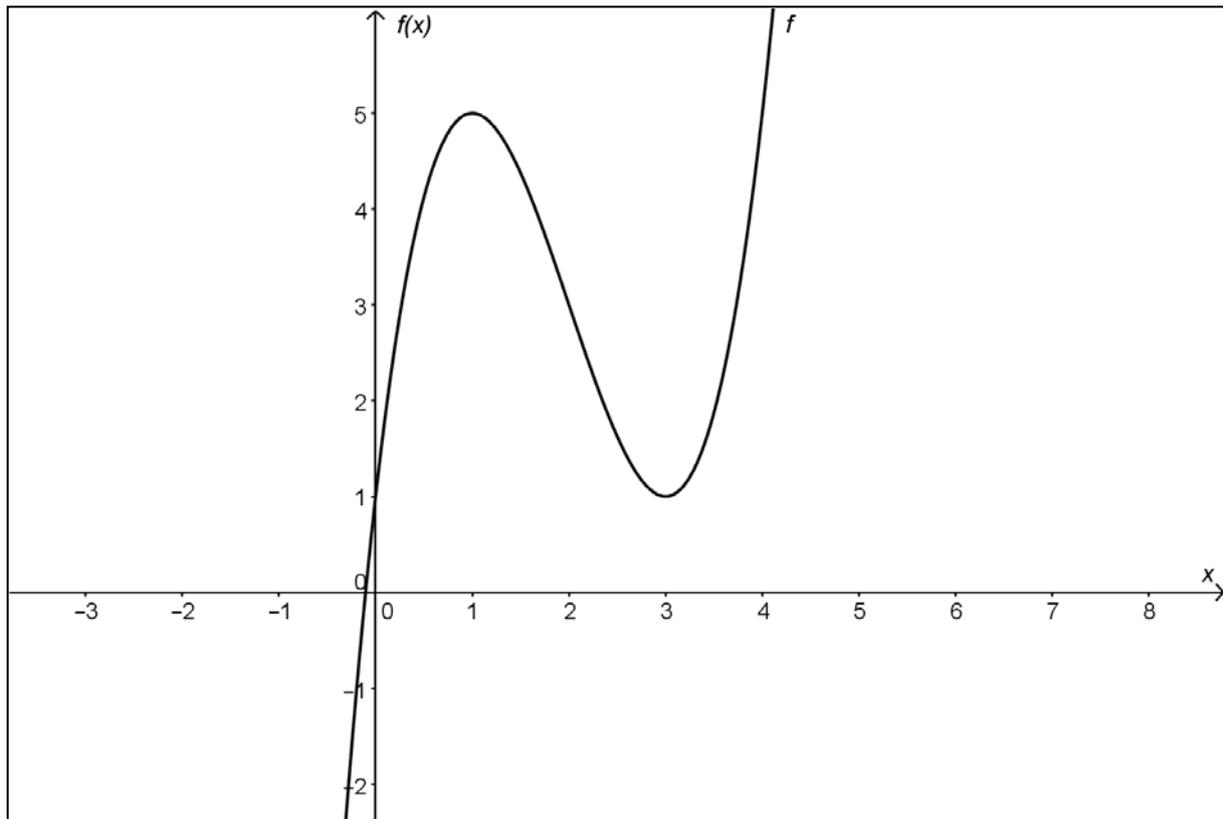
### Mathematik

#### Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

#### Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$ .

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von  $f$ .



Abbildung



Name: \_\_\_\_\_

- a) Ermitteln Sie auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion  $f$ .  
(2 Punkte)
- b) Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von  $f$ .  
(7 Punkte)
- c) Zeichnen Sie in die Abbildung die Sekante  $s$  durch die Punkte  $P(2|3)$  und  $Q(3|1)$  ein.  
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Sekante  $s$ .  
(6 Punkte)
- d) Ein Schüler möchte am Beispiel der Funktion  $f$  in einem Referat erklären, wie deren Ableitung  $f'(a)$  an einer Stelle  $a$  näherungsweise ermittelt werden kann. Dazu hat er eine Tabelle angelegt.

Term	$\frac{f(2,4)-3}{2,4-2}$	$\frac{f(2,3)-3}{2,3-2}$	$\frac{f(2,2)-3}{2,2-2}$	$\frac{f(2,1)-3}{2,1-2}$
Wert	-2,84	-2,91	-2,96	-2,99

Tabelle

Geben Sie an, um welche Stelle  $a$  es sich hier handelt.

Erklären Sie, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung  $f'(a)$  annähern.

(4 Punkte)

- e) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$g(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 18.$$

Ermitteln Sie, durch welche Transformationen der Graph der Funktion  $g$  aus dem Graphen der Funktion  $f$  hervorgeht, und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

(5 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Früher wurden in den Städten auf Hügeln oder kleineren Bergen Wassertürme gebaut. Durch das in den Türmen gespeicherte Wasser konnte ein ausreichender Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser sichergestellt werden.

Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden.

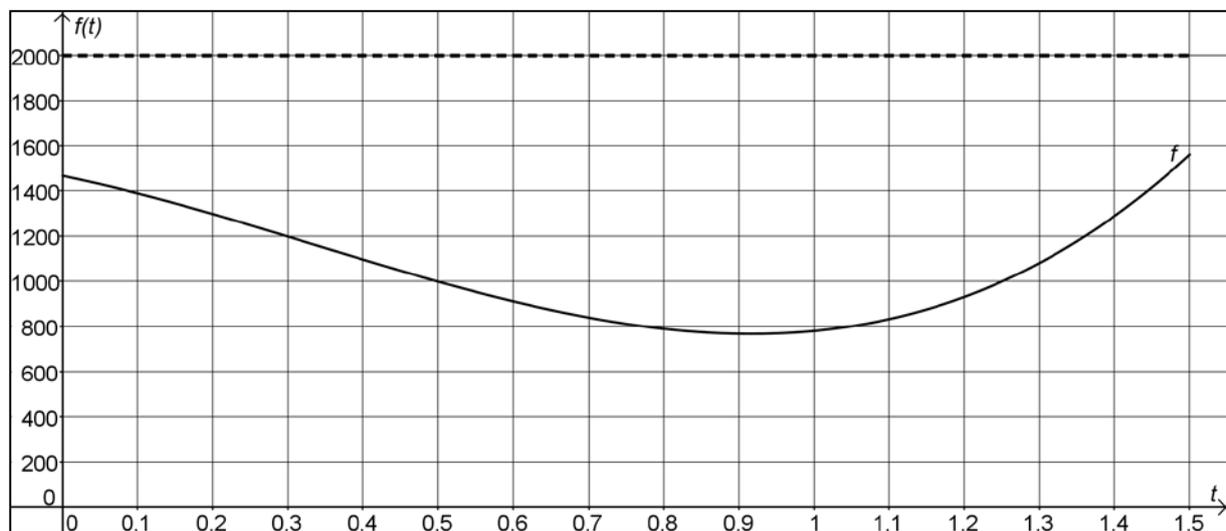
Um den nötigen Wasserdruck zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens  $1000 \text{ m}^3$  Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind. Die maximale Füllmenge beträgt  $2000 \text{ m}^3$ .

Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 7:30 Uhr für  $0 \leq t \leq 1,5$  durch die Funktion  $f$  mit der Gleichung

$$f(t) = 1000 \cdot t^3 - 1000 \cdot t^2 - 687 \cdot t + 1467$$

modelliert. Dabei bezeichnet  $t$  die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und  $f(t)$  die Wassermenge im Speicher des Turmes in  $\text{m}^3$ .

Der Graph der Funktion  $f$  ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

Mit der Funktion  $f$  ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.



Name: \_\_\_\_\_

a) (1) Zeigen Sie, dass um 7:00 Uhr nur noch  $780 \text{ m}^3$  Wasser im Speicher des Turmes vorhanden sind.

(2) Ermitteln Sie näherungsweise die Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert von  $1000 \text{ m}^3$  liegt.

(2 + 4 Punkte)

b) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.

Berechnen Sie, um wie viele  $\text{m}^3$  Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.

(8 Punkte)

c) Berechnen Sie  $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$  und  $f'(1)$  und interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.

(4 Punkte)

d) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$g(t) = -1000 \cdot t^3 + 1000 \cdot t^2 + 687 \cdot t + 533.$$

(1) Zeichnen Sie den Graphen von  $g$  in die Abbildung ein.

(2) Erklären Sie, welche Bedeutung die Funktionswerte  $g(t)$  mit  $0 \leq t \leq 1,5$  im Sachzusammenhang haben.

(4 + 2 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung