Anwendungsaufgaben für die Jahrgangsstufe 11 WAL 2009

Aufgabe 1

In der Medizin wird die Reaktionstärke R auf ein Medikament in Abhängigkeit von der Dosis x durch Funktionen R mit

$$R(x) = a \cdot x^2 (b - x), \quad a, b > 0$$

beschrieben.

Die Empfindlichkeit eines Körpers auf die Dosis x wird als die Ableitung R'(x)definiert.

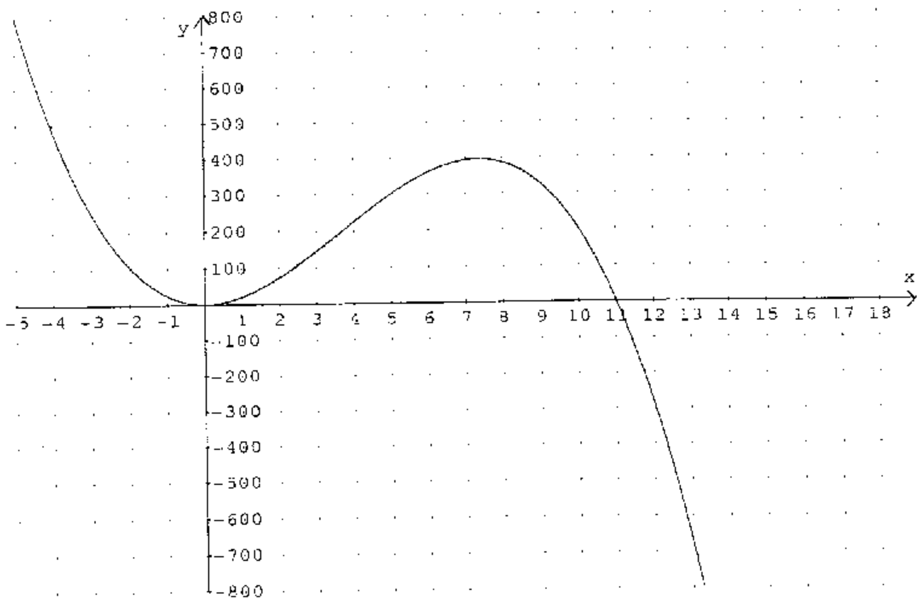
a. Setzen Sie a = 0.5 und b = 3 und berechnen Sie die Null- und Extremstellen von R. Skizzieren Sie den Graphen.

(1) Für welchen Dosiswert ist die Reakion am stärksten?
(2) Wann ist die Empfindlichkeit am stärksten?

Aufgabe 2

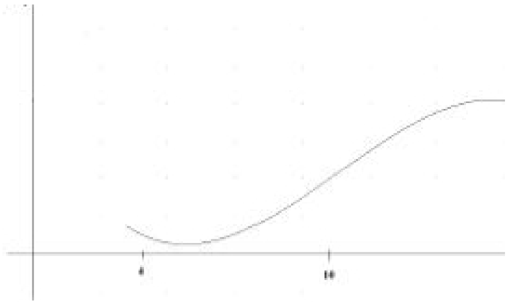
Das Bild auf der folgenden Seite zeigt den Graphen einer ganz-rationalen Funktion h.

a. Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der Ableitung von h. Benutzen Sie dazu das Koordinatensystem, in welchem der Graph von h bereits eingetragen ist.
b. Die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 + 24x^2$ besitzt einen vergleichbaren Graphen wie h. Zwischen ihren Nullstellen beschreibt die Funktion f die Wassermenge in einem Pumpspeicherwerk. Bestimmen Sie diesen Bereich. Dabei geben die y-Werte die Wassermenge in m^3, die x-Werte ($x \geq 0$) die Zeit in Stunden an.
c. Wann wird nach dem Zeitpunkt x=0 die maximale Wassermenge erreicht, wie groß ist dieser maximale Wasserbestand?
d. Was bedeuten im Zusammenhang mit dem in Aufgabenteil b) beschriebenen Sachverhalt die Begriffe mittlere Änderungsrate der Funktion f und lokale Änderungsrate der Funk-tion f?
e. Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f.
f. Welche Bedeutung hat die Wendestelle von f im Zusammenhang mit dem in Aufgabenteil b) beschriebenen Sachverhalt?



Aufgabe 3

Ein Industrieunternehmen lässt ständig beobachten, wie viele Surfer gerade die Internetseiten des Unternehmens besuchen. Die nebenstehende Kurve zeigt den durchschnittlichen Besuch der Internetseiten im Zeitraum von 4h morgens bis 16h nachmittags. Die Anzahl der Surfer, die zu einem bestimmten Zeitpunkt gerade die Internetseiten besuchen, lässt sich näherungsweise durch den folgenden Funktionsterm beschreiben:



$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 225x + 520 .$$

Dabei gibt zum Beispiel $f(8)$ an, wie viele Surfer um 8h auf den Internetseiten der Firma sind.

a) Berechnen Sie $f'(9)$ und erläutern Sie die Bedeutung von $f'(9)$ in der vorgegebenen Situation.

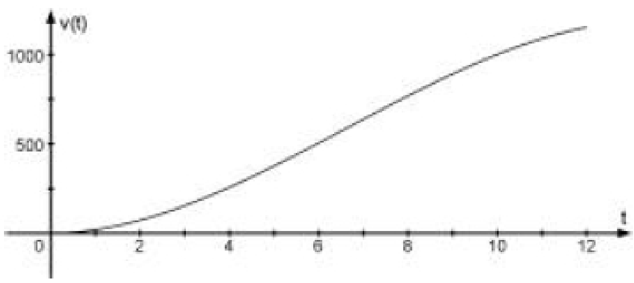
b) Von besonderem Interesse ist die Höchstzahl von Surfern, die an einem bestimmten Tag zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 4h und 16h gleichzeitig die Internetseiten des Unternehmens besuchen. Wie hoch ist dieser Spitzenwert gemäß f(x)?
(Zur Kontrolle: 520 Surfer)

c) Am 31.Mai ergab sich ein Spitzenwert von 805 Surfern, die gleichzeitig die Seiten des Unternehmens besuchten. Um wie viel Prozent lag dieser Wert über dem zu erwartenden Spitzenwert von b)?

d) An einem bestimmten Tag sind abweichend von f(9) um 9h bereits 240 Besucher auf den Internetseiten, weil sich in der Zwischenzeit die Anzahl derer erhöht hat, die einen Internetanschluss haben Mit wie vielen Besuchern würden Sie dann an diesem Tag um 10h rechnen? Geben Sie eine oder auch mehrere rechnerisch begründete Prognosen an.

Aufgabe 4

Pflanzen produzieren bei der Fotosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Wir betrachten nun diesen Vorgang für einen bestimmten Baum an einem bestimmten Tag zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 18 Uhr abends (Sonnenuntergang). Messungen ergaben für diesen Baum den abgebildeten Graphen.



Hierbei gibt t an, wie viel Stunden seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr vergangen sind.
$v(t)$ gibt an, wie viel Liter Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt t insgesamt produziert hat.

Der Graph kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$v(t) = -t^3 + 20t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 12 .$$

a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff produziert hat. Wie viel Sauerstoff gibt der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich pro Stunde ab?

b) Um wie viel Prozent ist die Produktion zwischen 15 Uhr und 17 Uhr niedriger als zwischen 13 Uhr und 15 Uhr? (Runden Sie das Endergebnis auf eine Dezimale.)

c) Bestimmen Sie die Steigung von v an der Stelle $t = 5$, und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes in dem gegebenen Sachzusammenhang.

d) Wann produziert der Baum am meisten Sauerstoff? Geben Sie zunächst eine begründete Vermutung. Erläutern Sie anschließend, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch ermitteln kann.

Aufgabe 5

In der Sportmedizin kennt man den Begriff der *anaeroben Schwelle*. Dieser Begriff lässt sich vereinfacht folgendermaßen erklären:

Die Energiebereitstellung für eine länger andauernde Bewegung bezeichnet man als *aerob*, wenn durch die Atmung so viel Sauerstoff aufgenommen wird, wie der Körper zur Bewegung benötigt. Steht – etwa bei einer intensiven Belastung – nicht genügend Sauerstoff zur Verfügung, so bildet der Körper zunehmend Laktat (Milchsäure) und die Bewegung wird immer schwerer. Die Energiegewinnung ohne Sauerstoff („anaerob“) spielt dann eine maßgebliche Rolle. Die Grenze zwischen diesen beiden Zuständen heißt *anaerobe Schwelle*.

Die anaerobe Schwelle kann dazu benutzt werden, den Trainingszustand eines Sportlers zu untersuchen. Ein gängiges Verfahren zur Bestimmung der anaeroben Schwelle nutzt die Laktatkonzentration im Blut. Bei der Untersuchung läuft der Sportler auf einem Laufband. Die Geschwindigkeit dieses Laufbandes wird in gleichen Zeitabständen gleichmäßig erhöht. Dabei wird immer wieder die Laktatkonzentration im Blut gemessen. Je höher die Geschwindigkeit ist, bei der der Sportler die anaerobe Schwelle erreicht, desto besser ist sein Trainingszustand.

Bei einem bestimmten Sportler A wird diese Untersuchung durchgeführt. Dabei ergibt sich aus den Messwerten näherungsweise die in Abbildung 1 gezeichnete Laktatkurve. Diese kann für $7 \le x \le 18$ durch folgende Gleichung dargestellt werden

$$f(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}918x^2 + 9x - 25\,.$$

x bezeichnet dabei die Laufgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, f(x) die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter.

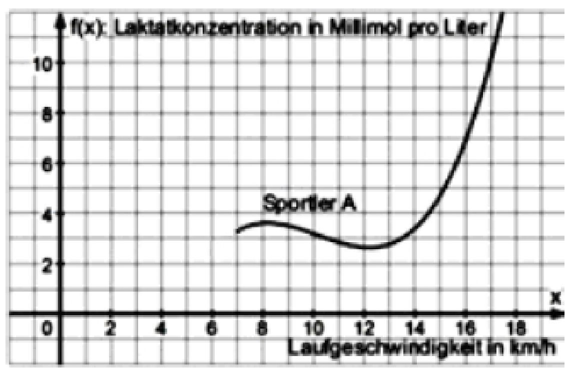


Abbildung 1

a) Berechnen Sie die Laktatkonzentration, die sich für Sportler A bei $16\frac{km}{h}$ ergibt!

b) Zur Berechnung der anaeroben Schwelle gibt es zwei unterschiedliche mathematische Modelle. Nach dem Mader-Modell (1976) wird die anaerobe Schwelle bei einer Laktatkonzentration von 4 Millimol pro Liter erreicht. Bestimmen Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die Geschwindigkeit, bei der die anaerobe Schwelle überschritten wird.

c) Nach dem Modell des Sportmediziners G. Simon (1981) findet man die anaerobe Schwelle, indem man den Punkt der Kurve ermittelt, in dem die Steigung 1 ist. Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit für die anaerobe Schwelle nach dem Modell von Simon!

d) Bei der abgebildeten Laktatkurve fällt auf (s. Abbildung 1), dass die Laktatkonzentration in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich abnimmt. Berechnen Sie die Grenzen dieses Bereiches!

e) Bei welcher Laufgeschwindigkeit nimmt die Laktatkonzentration am stärksten ab?

f) Abbildung 2 zeigt die Laktatkurve eines Sportlers B, für den die Untersuchung wie für Sportler A durchgeführt wurde. Begründen Sie, welcher der beiden Sportler A und B den besseren Trainingszustand aufweist!

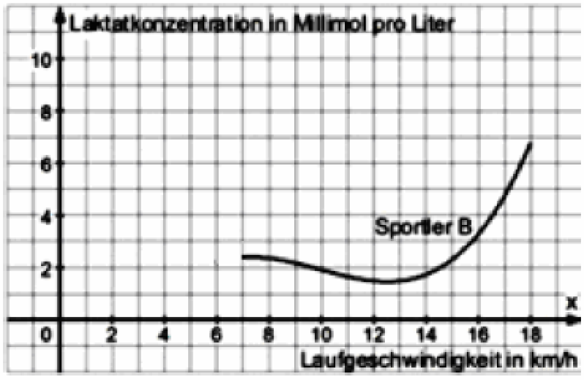


Abbildung 2

Aufgabe 6

Bild 287/2 zeigt die vorgesehenen Maße einer Metallrutsche, die ein Spielgerätefabrikant für Spielplätze konstruieren will. Das seitliche Profil der Rutsche soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades festgelegt und durch dessen Extremalpunkte begrenzt sein.
Der TÜV fordert von den Herstellern, dass solche Rutschen an keiner Stelle steiler sein dürfen als 50° gegen die Horizontale.

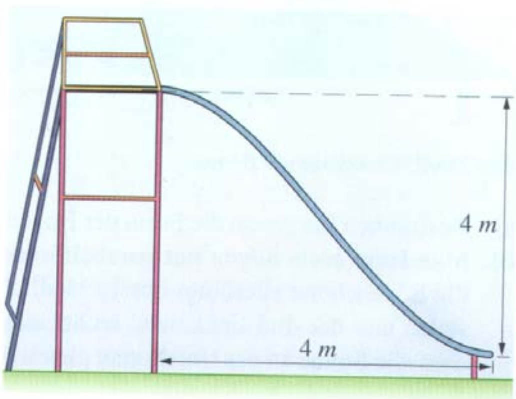


Bild 287/2: Skizze einer Rutsche

Aufgabe 7

Bauwesen

Unter einem Kanal soll ein Straßentunnel gebaut werden. Die Fahrbahn soll in der Mitte des Kanals eine Tiefe von 20 m unter der Wasseroberfläche und an den 200 m hiervon entfernten Zufahrten eine Höhe von 12 m über der Wasseroberfläche erreichen.
Die Fahrbahn soll so verlaufen, wie es in Bild 287/1 angedeutet ist: Drei gleich weit geöffnete Parabeln sind so aneinandergesetzt, dass die Zufahrten auf Hochpunkten liegen und die Parabelstücke ohne Knick ineinander übergehen.

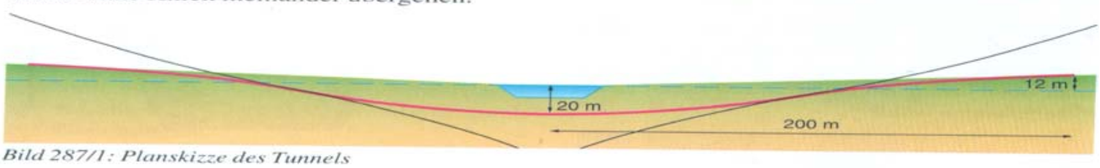


Bild 287/1: Planskizze des Tunnels

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der drei Parabeln sowie ihre Schnittpunkte.
b) Welches ist die größte Steigung der Straße und an welchen Stellen tritt sie auf?
c) In welcher Entfernung von der Kanalmitte erreicht die Straße die Höhe des Wasserspiegels?
d) Damit die Zufahrt flacher wird, soll die Öffnungsweite der mittleren Parabel dem Betrag nach doppelt so groß sein wie bei den äußeren Parabeln. Lösen Sie a) bis c) für diesen Fall.

Aufgabe 8

Die Wurfhöhe beim **senkrechten Wurf nach oben** hängt auch von der geografischen Lage ab. In Mitteleuropa wird sie durch die Gleichung $h(t) = v_0 t - 4{,}905\,t^2$ beschrieben. Dabei ist t die Anzahl der seit dem Abwurf vergangenen Sekunden, h die Anzahl der Meter über der Abwurfstelle und v_0 ein Parameter.

a) Zeigen Sie, dass v_0 die Maßzahl der Anfangsgeschwindigkeit ist.

b) Ein Delphin springt bei einer Vorführung durch einen 6 m über der Wasseroberfläche hängenden Ring. Bestimmen Sie v_0.

c) Im August 1998 lag der Hochsprung-Weltrekord der Herren bei 2,45 m, der der Damen bei 2,09 m. Wie groß war jeweils v_0?

d) Warum ist der Stabhochsprung nicht als „senkrechter Wurf" zu interpretieren?

Aufgabe 9

Wird ein Gegenstand beim sogenannten **schrägen Wurf** unter dem Winkel α gegen die Horizontale abgeworfen, so beschreibt die Gleichung $h(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$ seine Höhe über der Abwurfstelle zum Zeitpunkt t nach dem Abwurf. Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit und g die Fallbeschleunigung am Ort des Wurfs. In Mitteleuropa ist $g = 9{,}81$ (gemessen in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Zeigen Sie, dass ein Ball bei festen Werten für v_0 und g am weitesten fliegt, wenn $\alpha = 45°$ ist.

Aufgabe 10

Gegeben ist die Kostenfunktion K zu $K(x) = 0{,}5x^3 - 8{,}25x^2 + 50{,}375x + 20$. Sie gibt die Kosten in 1000 € an, die bei der Herstellung von x Wareneinheiten zu je 10 000 Stück anfallen.

a) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Stückkosten am niedrigsten sind.

b) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten am niedrigsten sind.

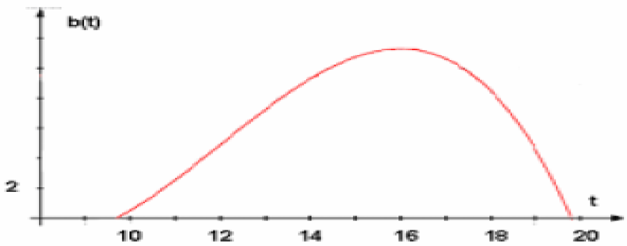
c) Bestimmen Sie den Bereich der Produktionsmenge, in dem bei einem Stückpreis von 2,20 € der Ertrag positiv ist.

d) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, für die der Ertrag bei einem Stückpreis von 2,20 € am größten ist.

e) Bestimmen Sie eine Funktion, die für einen beliebigen Stückpreis p (in €) den maximalen Ertrag angibt.

Aufgabe 11

Nebenstehende Graphik gibt vereinfacht die Anzahl b der Besucher (gemessen in tausend Personen) in einem Freizeitpark von 10.00 Uhr bis 19.30 Uhr an. Der Funktionsterm dazu lautet:
$b(t) = -0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 62{,}5$ für $10 < t \le 19{,}5$.



a) Berechnen Sie die Zahl der Besucher, die an einem Tag eine Stunde nach Öffnung im Park sind!

b) Wann ist die Zahl der Besucher maximal? Wie viele sind es?

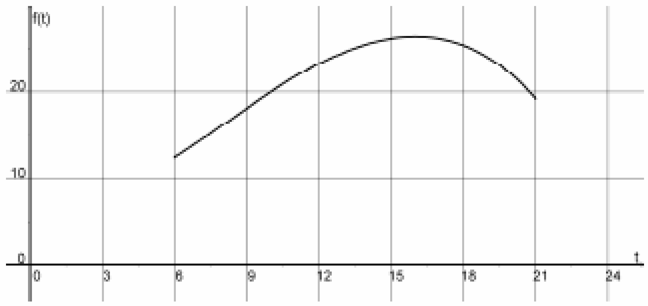
c) Wann ist der Andrang an den Kassen am größten? Begründen Sie im Sachzusammenhang!

d) Erfahrungsgemäß ist an den Imbissstuben im Park mit erhöhtem Andrang zu rechnen, wenn mindestens 9500 Besucher im Park sind. Für den Direktor besteht dann die Notwendigkeit, zusätzliches Personal bereit zu stellen. Der Zeitraum, für den dies erforderlich ist, soll näherungsweise, z.B. zeichnerisch ermittelt werden.

Aufgabe 12

In modernen Wetterstationen werden rund um die Uhr Daten über die Lufttemperatur (kurz: Temperatur) durch elektronische Messautomaten erfasst.

Für $6 \leq t \leq 21$ stellt der Graph der Funktion f modellhaft den Temperaturverlauf während eines bestimmten Tages in der Zeit von 6.00 Uhr bis 21.00 Uhr dar (siehe Abbildung).



Es gilt:

$$f(t) = -0{,}01 \cdot t^3 + 0{,}24 \cdot t^2 + 6 \ ,$$

wobei t die Uhrzeit in Stunden angibt und $f(t)$ die Temperatur in °C.

a) Berechnen Sie die Temperatur zu Beginn und am Ende des vorgegebenen Zeitintervalls.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der der Tageshöchstwert erreicht wird, und prüfen Sie, ob es sich um einen Sommertag handelt.

(Sommertag: Tag, an dem die Höchsttemperatur 25 °C übertrifft)

b) Der Wendepunkt W hat die Koordinaten $W\left(8 \middle| f(8)\right)$. Diese Information kann im Folgenden ohne Nachweis verwendet werden.

Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen von f. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

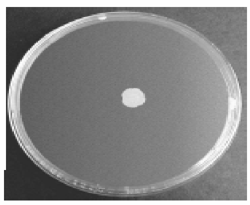
c) Um 10 Uhr beträgt die Temperatur 20 °C.

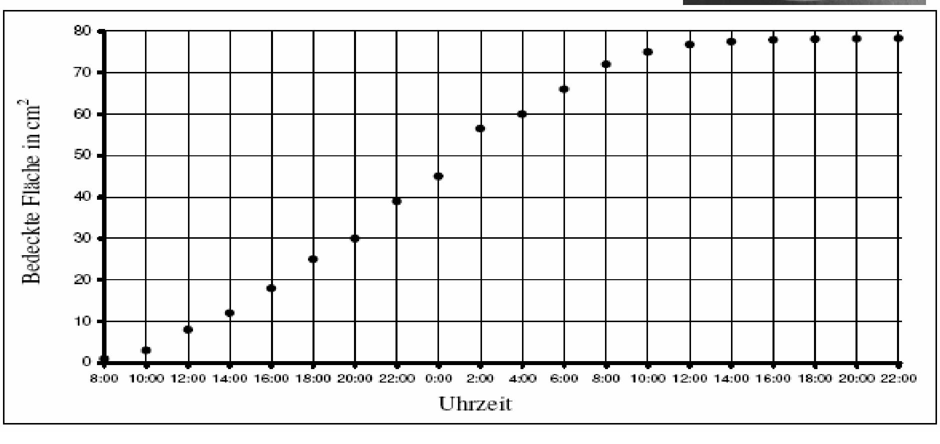
Ermitteln Sie in der Abbildung auf diesem Arbeitsblatt zeichnerisch näherungsweise den Zeitraum, in dem die Temperatur mindestens 20 °C beträgt.

Bei der rechnerischen Ermittlung dieses Zeitraumes führt der Ansatz $f(t) = 20$ zur Gleichung

Aufgabe 13

Ein Wissenschaftler hat im Rahmen einer Forschungsarbeit das Wachstum einer Bakterienkultur in einem Gefäß beobachtet. Alle zwei Stunden wurde von ihm die Größe der von den Bakterien bedeckten Fläche gemessen.
Seine Messwerte sind in folgendem Koordinatensystem dargestellt:





Der Wissenschaftler modelliert die Messreihe durch die folgende Funktion:

$$A(t) = -0{,}005\,t^3 + 0{,}2\,t^2 + 0{,}9\,t + 1$$

$A(t)$: Fläche (Einheit: cm^2)

t: Zeit seit dem Beobachtungsbeginn um 8.00 Uhr (Einheit: h)

Mit dieser Funktion ist es nun möglich, die Fragestellungen in den Aufgaben a) bis c) bearbeiten.

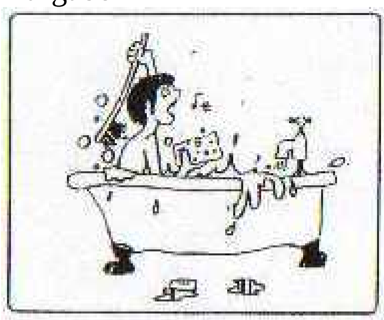
a) Berechnen Sie die Größe der um 5.00 Uhr nachts von Bakterien bedeckten Fläche.

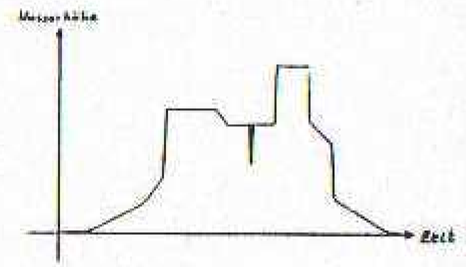
b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur (in $\frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$) zwischen dem Beobachtungsbeginn und 5.00 Uhr nachts.

c) Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit genauso groß wie zu Beginn der Beobachtung?
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.
Bis zu welchem Zeitpunkt wächst im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche?

d) Ein Kollege des Wissenschaftlers ist der Meinung, dass die zur Modellierung verwendete Funktion das Versuchsergebnis nicht angemessen beschreibt.
Geben Sie mindestens einen Grund für die Kritik des Kollegen an.

Aufgabe 14*





Dieser Graph beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne. Erzähle eine Geschichte dazu.